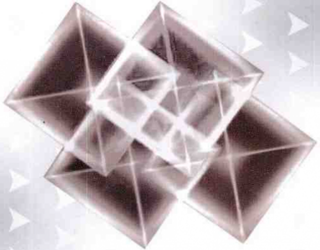
区间数理论的研究及其应用

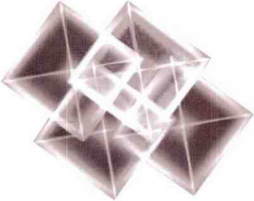
胡启洲　张卫华　◎著



科学出版社
www.sciencep.com

(U-0105.0101)

区间数理论的研究及其应用



科 学 出 版 社

联系电话：010-64000249

E-mail:gcjs@mail.sciencep.com

销售分类建议：应用数学，交通工程

ISBN 978-7-03-028993-3

9 787030 289933 >

定价：50.00 元

区间数理论的研究及其应用

胡启洲　张卫华　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是研究区间数理论及其应用的著作。全书内容包括两大部分，共20章。第1章为绪论。第一部分(第2～9章)是二元区间数理论的研究及其应用。在界定二元区间数的基本定义基础上，研究了二元区间数的基本运算和排序关系，建立了时序灰色关联决策模型、方案偏好标度模型、权重未知二元区间数决策模型、多指标余弦决策模型、基于物元分析的理想区间模型等，并利用二元区间数对城市公交系统和高速公路交通安全进行了评价，取得了满意效果。第二部分(第10～20章)是三元区间数理论的研究及其应用。在界定三元区间数的基本定义基础上，研究了三元区间数的基本运算和排序关系，建立了灰色关联决策模型、基于离差法的三元区间数决策模型、基于三元区间数的投影排序模型、基于三元区间数的理想决策模型、风险动态决策模型、综合评判模型等，并利用三元区间数对公交系统优化和公交系统测度进行了研究，为公共交通的进一步发展提供了理论支持。并且本书在定量分析的基础上，从理论上完善了多属性决策的理论问题。

本书可作为高等院校理工科应用数学、计算数学、管理科学与工程、系统工程、自动控制与交通工程等相关专业的高年级学生和研究生的教学用书，也可作为从事相关专业的高校教师、研究人员和工程技术人员等的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

区间数理论的研究及其应用 / 胡启洲，张卫华著. —北京：科学出版社，2010

ISBN 978-7-03-028993-3

Ⅰ. ①区… Ⅱ. ①胡…②张… Ⅲ. ①应用数学-数学理论-研究 Ⅳ. ①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 181837 号

责任编辑：张海娜 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：赵 博 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010年9月第一次印刷 印张：12

印数：1—2 000 字数：226 000

定价：50.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性和局限性，人类对许多事物的认识是有限的。为了分析和解决问题的需要，学者提出利用不确定性数学方法来研究该问题。不确定性数学方法是把研究不确定性现象的数学方法称为不确定性数学方法，它是一种新兴的研究不确定性现象和未知现象的实用型和交叉型相结合的方法。目前常用的不确定性数学方法有：模糊数学、灰色系统理论、可拓学、属性数学、粗糙集理论等。

当人们使用不确定性数学方法描述不确定性问题时，一方面，从客观上讲，由于测量、计算所带来的数据误差，以及信息不完全带来的数据缺乏，表示特征行为的原始数据往往不是一个确定的数，而是一些区间数；另一方面，从主观上讲，由于人们对事物以及模糊事物的认识不会只停留在一个点上，因此人们对事物认识的量化就要用到区间数。所以，考虑到人们认识、思维、感觉、推理等的局限性、模糊性和客观事物的复杂性、不确定性，为了使决策更客观、更准确地反映所研究问题的实际情况，作者对区间数在模糊环境下进行了综合研究，首次从理论上提出了区间数理论，从实践上丰富了不确定性数学理论。

由于许多决策信息具有模糊性和不确定性，导致决策者对属性分析很难用一个精确的数值描述出来，在这种情况下，作者提出用二元区间数表示属性的信息量。在有效克服了由于模糊性而带来的数值上的不确定性的基础上，作者界定了二元区间数的基本概念。通过对二元区间数的内涵剖析、相关概念的界定，研究了二元区间数的运算关系和排序准则，并进行了应用分析。应用结果表明基于二元区间数的决策结果不仅更符合实际，而且能更好地综合决策者的信息。

同时在研究过程中，一方面，当用二元区间数表示一个参量时，有时为了覆盖整个取值范围，区间可能会取得过大，这时如果再认为整个区间内取值机会均等，得出的结果就会出现大的误差；另一方面，当用二元区间数对多属性决策问题进行研究时，用一个二元区间数表示属性值的同时属性值偏好于二元区间内某个数，具有偏好信息。为了能更客观、更准确地反映所研究的不确定性问题，作者对模糊环境下的区间数进行了拓展，提出了三元区间数的概念。在界定了三元区间数的基本概念和相关定义的基础上，研究了三元区间数的性质、运算关系及排序指标等，并进行了应用分析，从而为用三元区间数理论来解决多属性决策问题提供了新途径。

本书内容分为两部分：二元区间数的理论及其应用；三元区间数的理论及其应

用。两部分内容主要从理论的角度出发，研究二元区间数和三元区间数的基本定义、运算法则、排序关系、数学建模以及应用分析等。具体内容如下：

(1) 在基本定义中，在界定二元区间数和三元区间数的基本概念基础上，剖析其内涵、研究其特征，并对相关概念进行界定研究。

(2) 在运算法则中，不但研究了二元区间数和三元区间数的初级运算，而且研究了二元区间数和三元区间数的高级运算，包括级数运算、积分运算、微分运算、微分方程运算等，丰富了区间数理论的内容。

(3) 在排序关系中，主要从理论的角度提出一些排序指标。由于二元区间数和三元区间数的特殊性，这些排序指标虽然具有科学性和实用性，但不一定具有公度性。

(4) 在数学建模方面，基于二元区间数理论，建立了时序灰色关联决策模型、方案偏好标度模型、权重未知二元区间数决策模型、多指标余弦决策模型、基于物元分析的理想区间模型等，并利用二元区间数对城市公交系统和高速公路交通安全进行了评价，取得了满意效果；基于三元区间数理论，建立了灰色关联决策模型、基于离差法的三元区间数决策模型、基于三元区间数的投影排序模型、基于三元区间数的理想决策模型、风险动态决策模型、综合评判模型等，并利用三元区间数对公交系统优化和系统测度进行了研究，从理论上完善了多属性决策理论的数学建模问题。

(5) 在应用方面，包括在管理科学和交通科学中的应用，都取得了比较满意的效果。多属性决策中许多无法解决的问题由于利用区间数理论研究而变得简单易行。同时也为有关部门进行科学决策提供理论支持。

本书是作者多年研究成果的汇总，也是对学术探索的长期积累。本书得到中央高校基本科研业务费专项基金项目(2010HGXT0203)、中国博士后科学基金项目(20100470016)、东南大学优秀博士学位论文基金项目(200708)和安徽省自然科学基金项目(090414162)的资助。

由于作者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指教。

常 用 符 号

1. 二元区间数

$$[\bar{A}]=[a^-,a^+]=\{x \mid a^- \leqslant x \leqslant a^+, x \in \mathbf{R}\}$$

其中，a^+ 为上极限，称为二元区间数的大元；a^- 为下极限，称为二元区间数的小元，且 $a^-,a^+ \in \mathbf{R}$。

(1) $[\overline{\bar{A}}]=[1-a^+,1-a^-]$ 为二元区间数 $[\bar{A}]$ 的补集。

(2) $E[[\bar{A}]]=\dfrac{a^-+a^+}{2}$ 为二元区间数 $[\bar{A}]$ 的期望值。

(3) $[\overline{\bar{A}}]=([a_1^-,a_1^+],[a_2^-,a_2^+],\cdots,[a_n^-,a_n^+])$ 为二元区间数 $[\bar{A}]$ 的向量。

2. 三元区间数

$$[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+] \text{ 且 } a^{\mathrm{l}} \leqslant a^* \leqslant a^{\mathrm{u}}$$

其中，a^{l} 为区间的下限，称为三元区间数的小元；a^{u} 为区间的上限，称为三元区间数的大元；a^* 为在此区间中取值可能性最大的数，即偏好值，称为三元区间数的特元。

(1) $E[[\bar{\bar{A}}]]=\dfrac{a^-+a^*+a^+}{2}$ 为三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]$ 的期望值。

(2) $[\overline{\bar{\bar{A}}}]=([a_1^-,a_1^*,a_1^+],[a_2^-,a_2^*,a_2^+],\cdots,[a_n^-,a_n^*,a_n^+])$ 为三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]$ 的向量。

目　录

第1章　绪　　论

1.1　不确定性数学理论的概述

用精确定义的概念和严格证明的定理描述现实世界的数量关系与空间形式，用精确控制的实验方法和精确的测量计算探索世界的规律，建立严密的理论体系，这是近代科学的特点[1]。虽然 20 世纪以来，精确数学及其应用以更大的规模和更快的速度发展着，但是这种绝对化的方法是不能处理所有学科的问题的[2]。20 世纪 60 年代中期，人们发现系统科学、交通科学和管理科学等学科中存在着大量的不确定性问题，如果还用精确数学方法处理这些问题，就会出现偏差，与实际情况相差较大[3]。所以，把现实生活中的一切问题都进行绝对的精确化是不可行的。学者把这种不能用精确数学处理的问题称为不确定性问题。

所谓不确定性，是指边界不清楚，既在质上没有确切的含义，又在量上没有明确的界限。这种边界不清的不确定性概念，不是由于人的主观认识达不到客观实际所造成的，而是事物的一种客观属性，是事物的差异之间存在着中间过渡过程的结果[4]。针对不确定性问题，人们绝不能迁就已有的精确数学方法而去改变这些学科的特点、改变这些学科的客观规律，而只能改造数学，使它的应用面更为广泛[5]。这就是不确定性数学产生的历史必然性。不确定性数学不是使数学变成不确定性的东西，而是使数学进入不确定性现象这个禁区，它是用定量的方法去研究、处理不确定性问题[6]。

由于客观事物的复杂性和不确定性、人类认识的局限性和人类思维的模糊性，人类对许多事物的认识是不确定的。所以为了分析和解决问题需要，学者提出利用不确定性数学方法来研究不确定性问题。不确定性数学方法是把研究不确定性现象的数学方法称为不确定性数学方法，它是一种新兴的研究不确定性现象和未知现象的实用型和交叉型相结合的方法。目前常用的不确定性数学方法有：模糊数学、灰色系统理论、可拓学、属性数学、粗糙集理论和区间数理论等。见图 1-1 和表 1-1。

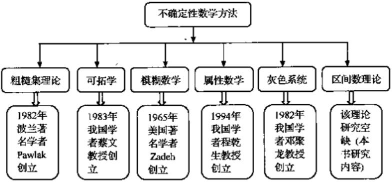


图 1-1 不确定性数学理论

表 1-1 几种不确定性数学方法的比较分析

名称	不确定性数学方法					
	可拓学	粗糙集理论	属性数学	区间数理论	灰色系统理论	模糊数学
模型	物元分析模型	粗糙模型	属性识别模型	区间综合模型	灰色评价模型	评判法
属性	解决矛盾问题的规律和方法，将多因子目标评价归结为单目标决策	通过建立单个指标的关系数据表，计算知识的熵，给出指标的权系数	从思维的角度提出属性集合，从数学的角度建立属性测度空间	利用集值统计理论，在取大取小运算中对中间值信息足够重视	解决少数据、少样本、信息不完全和经验缺乏的不确定性问题	实现把人类的直觉确定为具体系数，并将约束条件量化表示
考察值	定量计算	定性计算	定量计算	定性分析	定性分析	定性分析
标准化	标准化函数	约简函数	标准化函数	隶属函数	白化函数	隶属函数
函数	关联函数	近似算子	测度区间矩阵	区间矩阵	白化函数	隶属函数
结果	实数	实数	区间向量	区间数	实数	向量
条件	要有大量的调查数据，并要有多年的统计数据，不参考专家意见	对于信息的收集要做到客观准确，参考专家意见	需要进行大量调查，只需要当年的大量统计数据，不参考专家意见	不进行调查，不需要统计数据，仅参考专家意见	只需要当年的部分调查数据，但要参考专家意见	需要部分统计数据，并要参考专家意见

1.1.1 可拓学的发展概述

可拓学(extenics)(原称物元分析)是由我国著名学者、国家突出贡献专家、广东工业大学蔡文教授于1983年创立的一门属于数学、系统科学和思维科学的交叉科学，是贯穿于自然科学和社会科学而应用较广的横断科学。可拓学的研究对象

是矛盾问题，它研究事物的可拓性和事物开拓的规律，以及用以解决矛盾问题的方法。在现实世界中，决策的目标和给出的条件之间存在矛盾。通过分析矛盾，抓住主要矛盾，采取一些特殊措施，可以把矛盾转化为相容问题，加以解决[7]。我国学者蔡文教授提出物元分析理论，通过分析物元结构和相互关系，找出变化和转化的规律和方法，达到解决矛盾问题的目的。物元分析的数学基础是可拓集合论，用关联函数表示元素和集合的可变属性，通过物元变换和可拓子集域的计算，求得给定问题的相容度，达到判断和评价的目的。物元分析方法可以解决评价对象的指标存在不相容性和可变性的问题，应用领域包括产品质量的综合评价、企业信用等级评价、项目评估等[8]。

1. 可拓学发展现状

1983 年，蔡文教授发表了论文"可拓集合和不相容问题"，提出了探讨解决矛盾问题的规律和方法这一研究方向，提出了研究物元及其变化的物元理论和建立在可拓集合基础上的可拓数学工具，标志着新学科"可拓学"的诞生。开创了用以解决不相容问题的物元理论。"可拓学是研究事物的可拓性和事物开拓的规律和方法，并用以解决问题的科学"[9]。可拓学以矛盾问题为研究对象，探讨用形式化解决它们的规律和方法。可拓学的基本理论包括研究物元及其变化的物元理论和可拓集合理论。物元可拓理论为解决矛盾问题提供了主要的理论依据和技术手段[9]。

物元理论的发展导致了对可拓集的研究，而可拓集的研究也以物元理论为基础。可拓学的发展经历了 3 个阶段[9]：萌芽阶段(1976～1983 年)，这一阶段提出了研究事物可拓性和处理不相容问题的方向；初创阶段(1984～1992 年)，这一阶段确定了解决矛盾问题的技术手段和研究途径，形成了解决问题的一些初步方法；完成阶段(1993 年后)，这一阶段完成了可拓学的理论体系，使可拓论系统化，阐明可拓论在学科中的位置，论证它的特殊意义，研究它的应用方法。

2. 可拓数学

经典数学具有高度的抽象性，这种抽象性舍去了事物的质，只研究事物的量和空间形式。在可拓集合论中，抽象不仅顾及量，也顾及质，物元可拓集合使数学的抽象从数量关系和空间形式发展到事物的质的抽象，是一门把事物的质和量统一起来的横断科学。所以，建立在可拓集合基础上的可拓数学，将有别于经典数学和模糊数学，它不但扩大了数学的研究范围，使数学的研究领域扩展到研究矛盾问题，而且扩展到质与量相结合的物元，实现了事物质和量的统一。经典数学、模糊数学和可拓数学这 3 类数学的区别与联系，见表 1-2。

表 1-2　三种数学的区别与联系[5]

类型	经典数学	模糊数学	可拓数学
研究对象	精确问题数学化	模糊问题数学化	矛盾问题数学化
描述事物的性质	精确性	模糊性	可拓性
集合基础	Cantor 集合	Fuzzy 集合	可拓集合
定量化工具	特征函数 $C_A(x)\in[0,1]$	隶属函数 $\mu_A(x)\in[0,1]$	关联函数 $k_A\in[-\infty,+\infty]$
逻辑关系	形式逻辑	模糊逻辑	可拓逻辑
模型	数学模型	模糊数学模型	物元模型

1.1.2　粗糙集理论的发展概述

波兰学者 Pawlak 于 1982 年提出的粗糙集(rough set)理论是一种研究不完整、不确定知识的表达、学习及归纳的数学方法。它为研究不精确数据和不完整数据的分析、推理，挖掘数据之间的关系，发现潜在的知识提供了行之有效的数学工具。同处理不确定性与模糊信息的模糊集理论及证据理论相比，粗糙集理论的最大优势是无须提供除问题所需处理的数据集合之外的任何先验信息[11]，就可以得到满意的结果。此外，粗糙集的另一个优势是能够有效地去除冗余，简化计算过程。因此，粗糙集可以克服传统不确定处理方法的不足，为不精确、不完全数据的决策问题提供了更接近人类知识的数学工具[12]。

1. *粗糙集理论的主要研究内容*

粗糙集理论就是为解决不确定性问题而建立的一个模糊性和不确定性的数学模型。模糊是集合(概念)的属性，并且严格地与集合边界区域的存在相关，而不确定性则是集合中元素的属性。由于现实世界中信息并非十分充分，因而导致了不可辨识性。粗糙集理论与应用的核心基础是从近似空间导出的一对近似算子，即上近似算子和下近似算子(又称上、下近似集)。经典 Pawlak 模型中的不分明关系是一种等价关系，要求很高，限制了粗糙集模型的应用[13]。粗糙集理论与其他处理不确定和不精确问题理论的最显著的区别是它无须提供问题所需处理的数据集合之外的任何先验信息，所以对问题的不确定性的描述或处理可以说是比较客观的，由于这个理论未能包含处理不精确或不确定原始数据的机制，所以这个理论与概率论、模糊数学和证据理论等其他处理不确定或不精确问题的理论有很强的互补性。因此，研究粗糙集理论和其他理论的关系也是粗糙集理论研究的重点之一[14]。

2. 粗糙集理论的应用现状

由于属性约简是一个 NP-Hard 问题，许多学者进行了系统的研究。一方面，基于粗糙集理论的应用研究主要集中在属性约简、规则获取、基于粗糙集的计算智能算法研究等方面[15]。另一方面，基于粗糙集的约简理论发展为数据挖掘提供了许多有效的新方法。比如，在不同的信息系统（协调的和不协调的、完备的和不完备的）中，信息论、概念格、群体智能算法技术等都有了相应的研究成果[16]。总之，粗糙集理论已经在多个领域中得到了广泛应用，为解决相关问题提供了理论支持。

1.1.3 灰色系统理论的发展概述

在自然界和思维领域，不确定性问题普遍存在，大样本多数据的不确定性问题，可以用概率论和数理统计解决；认识不确定性问题，可以用模糊数学解决。然而，还有另外一类不确定性问题，即少数据、小样本、信息不完全和经验缺乏的不确定性问题[17]。灰色系统理论就是处置少数据不确定性问题的理论。由于少数据不确定性亦称灰性，所以具有灰性的系统称为灰色系统。特别是在工业、农业、社会经济等领域，由于运行机制不清晰、环境变化、条件复杂、处理手段有限等，有许多的系统呈现灰性。

1982 年，我国著名学者邓聚龙教授提出的以“部分信息已知，部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定系统为研究对象的灰色系统(grey system)，主要通过对“部分”已知信息的生成、开发、提取有价值的信息，实现对系统运行规律的正确描述和有效控制，达到有效解决问题的目的。由于贫信息不确定系统的普遍存在，所以决定了这一理论具有十分广阔的发展前景。

1. 灰色系统理论发展现状

1945 年，维纳在研究机电工程时，首先提出了黑箱问题，灰色系统是黑箱概念的一种推广。1982 年，北荷兰出版公司出版的 *Systems and Control Letters* 期刊上发表了我国学者邓聚龙教授的第一篇灰色系统论文“灰色系统的控制问题”。同年，《华中工学院学报》第三期上发表了邓聚龙教授的第一篇中文灰色系统论文“灰色控制系统”，标志着灰色系统理论这一新兴学科的诞生。灰色系统(grey system)理论的研究对象是“部分信息已知，部分信息未知” 的“小样本”、“贫信息”不确定性系统，主要通过对“部分”已知信息的生成、开发、提取有价值的信息，实现对系统运行规律的正确描述和有效控制[18]。

灰色系统理论是研究解决灰色系统分析、数学建模、需求预测、管理决策和动态控制的理论。它是把一般系统论、信息论、控制论的观点和方法延伸到社会、经济、生态等抽象系统，运用数学方法，发展了一套解决信息不完备系统即灰色系统

的理论和方法。从本质上说,该理论是用数学方法解决信息缺乏的不确定性理论。所以,灰色系统是通过处理灰元使系统从结构上、模型上、关系上由灰变白,不断加深对系统的认识,获取更多有效信息的科学[19]。

2. 灰色系统的主要研究内容

客观世界是信息的世界,既有大量的已知信息,也有不少未知信息和非确知信息。已知信息为白色,未知信息或非确知信息为黑色,介于两者之间的是灰色。灰色系统是指部分信息已知、部分信息未知的系统。灰色系统理论是用数学方法解决信息不完全所引起的不确定性的不确定理论。黑色、灰色和白色是一种相对的概念,见表 1-3。

表 1-3 "灰"的引申含义[17]

类别	白	黑	灰
从表象看	明朗	暗	若明若暗
从过程看	新	旧	新旧交替
从性质看	纯	不纯	多种成分
从信息看	完全	不完全	部分完全
从结果看	唯一的解	无数的解	非唯一解
从态度看	肯定	否定	扬弃
从方法看	严厉	放纵	宽容

(1) 充分利用已知信息寻求系统的运动规律。研究灰色系统的关键是如何使灰色系统白化、模型化、优化。灰色系统理论视不确定量为灰色量,提出了灰色系统建模的具体数学方法,运用时间序列数据来确定微分方程的参量。灰色预测不是把观测数据序列视为一个随机过程,而是将其看成随机变化的灰色量或灰色过程,通过累加生成和相减生成逐步使灰色量白化,从而建立相应于微分方程的模型并作出预报[20]。这样,对某些大系统和长期预测问题,就可以发挥作用。

(2) 灰色系统理论能够处理贫信息系统。灰色预测模型只要求较短的观测资料即可制作,这和时间序列分析、多元分析等概率统计模型要求较长资料是很不一样的[21]。因此,对于某些只具有少量观测数据的项目来说,灰色预测是一个有用的工具,能够满足决策者的基本需要,达到预测的目的。

1.1.4 模糊数学的发展概述

模糊数学(fuzzy mathematics)是 1965 年美国学者 Zadeh 提出的用来解决"边界不清晰,外延不明确"的不确定现象[22]。模糊数学是研究如何处理"边界不清晰,外延不明确"这类模糊现象,从带模糊性的信息中得到有适当精确度的结论的

一种数学方法[23]。模糊数学最基本的概念是模糊集，它是普通集合概念的推广，所以它的研究范围相当广。由于模糊数学的研究起步比较早，其理论已经基本成熟，并被众多学者成功应用于各个工业领域，包括交通领域。

1. 模糊数学发展现状

19世纪末，德国数学家康托尔(Cantor)建立了集合论，奠定了现代数学的基础。经典集合论中，一个元素 X 要么属于集合 X，要么不属于集合 X，不存在模棱两可的中间状态。元素与集合之间的关系用特征函数来刻画[24]。但对于一些自然语言中出现的如"年轻"、"漂亮"、"高"、"好"一类的模糊概念，经典集合论则无法解决。1965年，美国加利福尼亚大学控制论专家 Zadeh 教授在 *Information and Control* 杂志上发表了论文"*Fuzzy set*"。并且查德给出了隶属函数的定义：A 是论域 U 的一个模糊子集，任一元素属于集合 A 的程度用[0,1]闭区间上的一个实数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 表示。对于一个给定的 x_0，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0)$ 称为元素的隶属度[23]。从此，模糊数学宣告诞生。模糊集合是客观存在的模糊概念的必然反映，所谓模糊概念就是边界不清晰、外延不明确的概念。所以，隶属度概念是模糊数学的基石。

由于集合是现代数学的基础，现在既然有了模糊集合，那么以模糊集合代替原来的经典集合，把经典数学模糊化，便产生了以模糊集合为基础的数学——模糊数学。

2. 模糊数学应用现状

模糊数学目前正沿着理论研究和应用研究两个方向迅速发展。一方面，理论研究主要是经典数学概念的模糊化。由于模糊集自身的层次结构，使得这种理论研究更加复杂，当然也因此更具吸引力。目前已形成了模糊拓扑、模糊代数、模糊分析、模糊测度及模糊计算机等模糊数学分支[25]。另一方面，应用研究主要是对模糊性内在规律的探讨，对模糊逻辑及模糊信息处理技术的研究。模糊数学的应用范围已遍及自然科学与社会科学的几乎所有领域。特别是在模糊控制、模式识别、聚类分析、系统评价、数据库、系统决策、人工智能及信息处理等方面取得了显著的成就[26,27]。

1.1.5 属性数学的发展概述

随着对不确定性问题研究的不断深化，学者们不断地提出新的想法和理念。特别是1994年我国北京大学程乾生教授提出了属性集和属性测度的概念，并创立了属性数学(attribute mathematics)这一学科。属性数学是一门刚刚兴起的、年轻的、逐渐被国内外学者所认识的学科[28]。属性数学处理社会现象和物理现象时与模糊数学的方法不同，首先从思维的角度，把属性作为集合，提出了属性集、属性空

间和属性可测空间的概念。然后从数学的角度，在属性可测空间的基础上建立属性测度空间，特别强调了属性测度要满足可加性这一基本原理[29]。有别于传统的概率统计方法遵循"一次一票"原则的属性统计方法，其遵循的是"一次一分"的原则，这种统计方法更具有鲜明的特点和实用性[30]。由于属性数学是一门新学科，因此还没有被广泛应用于各个工业领域。

1. 属性数学发展现状

1994 年，在武汉召开的第五届全国信号处理学术会议上，我国著名学者北京大学程乾生教授作了题为"属性集理论与思维、人工智能"的报告。报告中介绍了属性集、属性测度等属性数学(attribute mathematics)中的基本概念。随后又在《北京大学学报》及其他多种核心刊物上发表了"属性识别理论模型及其应用"、"属性数学——属性测度和属性统计"和"属性集和属性综合评价系统"等数十篇属性数学论文[30]。从此，属性数学作为人工智能中的数学方法诞生了[31]。它可能把概率方法、模糊方法、灰色方法和证据理论方法等统一起来，有可能成为融合人类各种知识进行综合分析的一种数学工具，为解决不确定性问题提供了新的架构。

经过快速发展，属性数学已经广泛地应用于系统科学、交通科学、社会经济、管理科学和基础学科等方面[32~34]，为人们更加科学地认识和研究不确定性现象提供一种新的思路和方法。

2. 属性数学的主要内容

模糊数学的基本概念模糊集是用一个函数来定义的。属性数学与模糊数学不同，首先从思维角度，把属性作为集合，提出了属性集、属性空间和属性可测空间等概念。然后从数学角度，在属性空间基础上建立属性测度空间[31]。在属性模式识别中，提出了属性测度模式识别准则：最小代价准则和置信水平准则，并分析了两者之间的关系。

关于研究对象空间、属性空间和属性集的对象，可见表 1-4。

表 1-4　对象空间、属性空间和属性集

对象空间 X	属性空间 F	属性集 $A,B,C,\cdots$
城市交通系统	城市公共交通系统	很好、好、中、差
城市常规公交系统	服务质量	良、好、中、差
道路交叉口	大气污染程度	轻、中、重、严重

1.2 区间数理论的发展概述

由于不确定性数学的多样性，每种不确定数学方法都有自己的优点和不足。如可拓学有助于从变化的角度识别变化中的因子，直观性好，但节域和经典域不易确定，需要的数据也多。灰色系统理论是解决灰问题的一种很好的理论，但对系统参数要求不高，分辨系数的确定带有一定的主观性，从而得到的结果精确性不高。模糊数学考虑系统内部关系的复杂性及不确定性，但隶属函数的确定及指数参数的模糊化会掺杂人为因素并失去有用信息。粗糙集理论体现了不确定系统的综合性、整体性和层次性，但在将问题简单化的过程中信息量损失大，最终结果难以反映系统本质。属性数学克服了信息重叠问题，在信息处理方面有很强的适应性，但在信息融合方面，理论上存在相悖情况。所以，寻找新的数学方法来解决不确定性问题成为一种需要。

在不确定性数学方法研究中，有一种数学方法是用区间来刻画事物和现象的本质和特征，这种方法后来被学者称为区间数理论。由于客观事物的复杂性和不确定性以及人类思维的模糊性和有限性，人们往往不能明确地给出属性的信息量，即使大量的实验也不能给出属性值的具体数值，而是只能给出一个区间范围，即以区间数的形式来表示。这样便有了区间数的概念。所以，区间数理论就是用集值统计理论，在对不确定现象或事物以区间数表示的情况下，建立评判矩阵来进行综合研究。因此，利用区间数理论来研究不确定性问题有着重要的理论意义和实际应用背景，但是有关这方面的研究还不成熟。作者将在对区间数理论进行深入研究的基础上，给出一些基本的定义、运算法则和排序关系等，建立相应的数学模型，并进行应用分析研究。

1.2.1 区间数的研究现状

人们通常使用随机、统计或模糊分析方法描述不确定性问题，但无论是随机过程的分布函数、统计中的抽象函数，还是模糊数学的隶属函数往往都不易确定[35]，这就造成了决策中的主观误差、计算中的系统误差。特别是在工程系统中，由于实际测量、数据处理计算所带来的数据误差，以及信息不完全带来的数据欠缺等，造成了研究中的客观误差，所以最后表示特征行为的原始数据往往不是一个确定的数值，而是一些区间范围，即区间数。这样用区间数来研究不确定性问题，不但可以避免主观误差和客观误差，而且得到的结果符合实际需要。所以在这种情况下，学者就提出区间数这一概念[36,37]。

由于人们对发展中的事物以及模糊事物的认识也不会只停留在一个点上，人们对事物认识的数量化就要用到区间数。模糊数学中为描述不确定性和模糊性引

入了区间数的概念，但其区间只能含于[0,1]内，反映的是变化的模糊程度，但并不能很好地刻画客观对象的变化情况。通过大量分析研究表明，在某些情况下如果用区间数分析可能更容易接近复杂不确定的生产实际，更符合人们的模糊思维习惯。所以国内外学者对区间数进行了初步研究。国内对区间数的主要研究成果有：胡宝清教授引入了关联函数为区间数的概念，探讨了区间数的运算法则和性质[38,39]；华中科技大学的邓聚龙教授给出了区间数与灰数之间的区别和联系[40]；吴江等学者在研究两种区间数信息规范化的方法的基础上，提出了基于可信度概念的区间数大小比较方法，很实用，但是计算繁琐而且量大、没有很清晰的逻辑性、没有形成具有公度性排序指标[41,42]；徐泽水等学者给出不同区间数在不同条件下的规范化公式，在区间数相离度概念的基础上给出可能度法，具有一定的创新性[43]；攀玉英等学者利用 TOPSIS 方法处理区间数多指标决策，在构造了各方案的理想方案基础上，以各方案与理想方案的距离大小来比较，并建立数学优化模型[44]；张兴芳等学者处理了指标权重为区间数的多指标决策问题，把区间数看成是均匀分布的函数，以区间数的左右端点的平均值作为分布的期望值，建立总离差最小的优化决策模型；同时徐泽水等学者把所有区间数的左边值、右边值分别对应分开，在以利用区间数矩阵计算各方案的权重作为判断一致性的依据的基础上，利用可能度对各方案进行优劣排序研究[45]；张吉军等学者提出了在相对优势度概念代替可能度作为比较区间数大小的基础上，利用相对优势度进行排序分析[46]。国外对区间数的主要研究有：早在 1931 年 Young 就开始了区间数的研究[47]，之后有以 Moore 为代表的众多学者继续研究[48,49]，特别是文献[50]中考虑时间权重为区间数的时序多指标决策问题，利用 TOPSIS 方法作为计算工具进行了动态排序研究；文献[51]中提出并证明了一种较为简单的可能度计算公式，并以该公式作为依据进行应用分析，取得了满意效果；文献[52]中提出了一种基于区间数相离度的标准差和平均差极大化方法来计算不确定性多属性决策权重，但过程比较复杂；文献[53]中以可能度的单调非减性作为主要创新结果构造一种方法，但该方法不够完善，存在两个无法比较的区间数；文献[54]中利用区间数来解决线性系统问题，学者们利用集值统计理论，对决策矩阵和相关因素进行权重分配的基础上，依据正有界闭区间数处理系统问题，取得了满意的效果。总之，区间数理论的研究，大概有两个方面：

1. 区间数的排序关系研究

区间数在决策分析等领域有非常强的应用背景，所以对区间数理论的研究成为管理科学中的一个热点。特别是区间数的排序方法是非常重要的实用技术问题，国内外对于区间数排序方法的研究虽然较多，但目前还没有一个能够被大家普遍接受的最好方法，所以学者们仍在研究区间数的排序问题。目前，现有文献的区

间数排序方法，基本上都是试图把不确定性的问题转换为确定性问题，然后利用确定性数学方法进行研究，但是这样得到的排序结果可能会存在一定的不合理性，得到的结果与实际相差较大，因此区间数排序问题值得进一步研究。

区间数的排序就是在给定的 N 个方案中找出其中最佳方案。所以对决策信息涉及区间数的不确定性多指标决策问题的研究，不可避免地涉及区间数的排序问题。两个区间数之间主要有两个区间不相交、相交以及包含 3 种关系。如何进行区间数排序是目前学者们研究的热点问题。现有对区间数排序方法的研究成果，大致可分为 4 类：

(1) 从数学的角度，提出区间数序关系的公理化定义，基于区间数的基本定义和运算关系，主要是讨论某些具体的区间数序关系满足公理化定义的条件，并根据这些区间数序关系对所有区间数进行排序研究。

(2) 从函数关系的角度，在区间数集合上建立某种线性次序的函数关系，在依据提出的函数表达式进行量化计算的基础上对区间数进行排序研究。

(3) 从几何的角度，通过引入刻画区间数大小的可能度，依据几何学中的大小比较原理，利用区间数的两两比较来实现对区间数排序研究。

(4) 从经典方法的角度，依据运筹学中的经典方法理想点法，在区间数多指标决策中引入理想方案的基础上，通过计算区间数决策方案对区间数理想方案的贴近度大小对决策方案进行大小排序研究。

虽然基于上述的分类，国内外学者取得了不少的研究成果，但如何进行区间数排序，目前没有一种方法是被大家接受、推广和广泛应用的。所以区间数排序方法还是需要不断地进行研究和探索。人们深信根据应用背景的不同，各种有效的、简易可行的方法一定会有更佳的应用前景。作者在定义了二元区间数和三元区间数的基础上，从理论上提出一套适合实际需要区间数理论研究的排序体系，并进行应用分析研究。

2. 基于区间数的决策模型

多属性决策是现代决策科学的一个重要组成部分，它的理论和方法在工程设计、经济、管理和军事等诸多领域中有着广泛的应用，如：投资决策、项目评估、系统评价、管理决策等。即区间数是决策者对决策问题给出的决策信息量，属多属性决策理论中的主要内容之一。由于多属性决策的实质是利用已有的决策信息通过一定的方式对一组(有限个)备选方案进行排序并择优，所以，它的主要内容由两部分组成：一方面是获取决策信息，即属性权重和属性值；另一方面是通过一定的方式对决策信息进行集结并对方案进行排序和择优。因此要研究多属性决策，首先要对区间数理论有一定了解。作者在对二元区间数和三元区间数的基本运算和排序关系进行研究的基础上，从理论上探讨了基于区间数的理论建模(包括决策模型和

评价模型)，并进行应用分析研究。

1.2.2 研究的主要内容

本书研究内容分为两部分。第一部分是二元区间数理论的研究及其应用，第二部分是三元区间数理论的研究及其应用。两部分都从理论出发，在界定二元区间数和三元区间数基本概念和相关定义的基础上，研究了区间数的基本运算法则、排序关系及数学建模等。并根据实际情况，对相关研究成果进行了应用分析，取得了满意效果。研究内容的架构如图 1-2 所示。

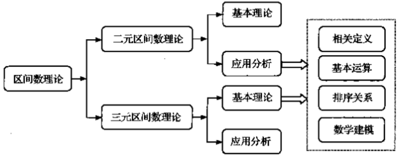


图 1-2　区间数理论研究技术路线图

总之，区间数理论在决策分析等领域有非常强的应用背景，也是解决不确定性问题的主要手段。国内外对于区间数的研究分散而不系统，目前还没有一个能够被大家所普遍接受的最好方法。作者在系统分析的基础上，依据经典数学的理论知识，研究了区间数的基本理论。本章作者在针对不确定性数学理论(包括：模糊数学、灰色系统理论、可拓学、属性数学、粗糙集理论等)进行综合评述的基础上，分析区间数理论的研究现状和主要研究内容，并提出了本书的主要研究内容和思路。

第一部分

二元区间数的基本理论

第 2 章　二元区间数的基础知识

由于客观事物的复杂性和不确定性以及人们的知识局限性和认识能力的模糊性，人们对事物的认识，特别是对发展中事物的认识，常常具有不确定性。学者称这种现象为不确定性问题，但这种不确定性问题要求人们不能用经典数学知识去解决它，而要用新的方法去研究它，这种新的方法被学者称为不确定性数学方法。但人们使用不确定性理论方法来描述不确定性问题，无论是可拓学中的关联函数、属性数学中的分布函数，还是模糊数学中的隶属函数、灰色系统理论中的灰色关联度以及粗糙集理论中的粗糙函数，往往都不易确定。特别是在工程系统中，一方面，从客观上讲，由于测量、计算所带来的数据误差，以及信息不完全带来的数据缺乏，表示特征行为的原始数据往往不是一个确定的数，而是一些区间数；另一方面，从主观上讲，由于人们对事物以及模糊事物的认识不会只停留在一个点上，因此人们对事物认识的量化就要用到区间数。所以，基于分析问题和解决问题的需要，本章首次界定二元区间数的基本概念，在用二元区间数表示要素内涵的基础上，有效克服了由于模糊性而带来的数值上的不确定性，并对二元区间数理论进行了深入研究，从理论上提出一套比较完善的理论体系，使人们对客观事物的决策更加科学化、合理化、规范化。这样依据二元区间数进行决策时，其决策结果不仅更符合实际，而且能更好地综合决策者的信息。

为此，本章在重点对二元区间数的基本理论进行深入研究的基础上，界定二元区间数的相关概念、基本运算和排序指标等。

2.1　二元区间数的基本定义

2.1.1　二元区间数的定义

设 $\mathbf{R}$ 表示实数集。对任意的 $a^-,a^+\in\mathbf{R}$ 且 $a^-\leqslant a^+$，记

$$[\bar{A}]=[a^-,a^+] \tag{2-1}$$

称 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 为一个标准的二元区间数。其中，a^+ 为上极限，称为二元区间数的大元；a^- 为下极限，称为二元区间数的小元。

性质 2.1　如果二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，则 $[\bar{A}]$ 的隶属函数

$$\mu_{[\bar{A}]}(x)=\begin{cases}1, & x\in[a^-,a^+]\\ 0, & x\notin[a^-,a^+]\end{cases} \tag{2-2}$$

性质 2.2 对任意的 $[\bar{A}]\in I(\mathbf{R})$（全体二元区间数的集合），如果 $a^-=a^+$，则 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 退化为一个普通的实数，即 $[\bar{A}]=a^-=a^+$，故 $\mathbf{R}\subset I(\mathbf{R})$。所以区间数是实数的推广。

性质 2.3 二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，则

(1) 若 $a^->0$，称二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 为正二元区间数。

(2) 若 $a^+<0$，称二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 为负二元区间数。

(3) 若 $a^-<0$ 且 $a^+>0$，称二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 为异二元区间数。

(4) 若 $a^-=a^+$，该二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 退化为普通的实数 A，即 $[\bar{A}]=A$。

性质 2.4 全体二元区间数组成的集合记为 $I(\mathbf{R})$。对任意的二元区间数 $[\bar{B}]$ 和 $[\bar{A}]\in I(\mathbf{R})$，如果 $a^-=b^-$ 且 $a^+=b^+$，称 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 与 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$ 相等，记为二元区间数 $[\bar{A}]=[\bar{B}]$。

定义 2.1 设 $\prec$ 是 $I(\mathbf{R})$（全体二元区间数的集合）上的一个二元关系，如果 $\prec$ 满足下面 6 条性质，则称 $\prec$ 为 $I(\mathbf{R})$ 上的一种序关系[56,57]。

(1) 自反性：$[\bar{A}]\prec[\bar{A}]$。

(2) 传递性：若 $[\bar{A}]\prec[\bar{B}]$ 且 $[\bar{B}]\prec[\bar{C}]$，则 $[A]\prec[\bar{C}]$。

(3) 完全性：对任意的 $[\bar{B}],[\bar{A}]\in I(\mathbf{R})$，一定有 $[\bar{A}]\prec[\bar{B}]$ 或者 $[\bar{B}]\prec[\bar{A}]$。

(4) 分离性：若 $a^-\prec b^-$，则 $[\bar{A}]\prec[\bar{B}]$。

(5) 相容性：若 $[\bar{A}]\prec[\bar{B}]$，则当 $[\bar{B}],[\bar{A}]\in I(\mathbf{R})$ 时，一定有 $[\bar{A}]\leqslant[\bar{B}]$。

(6) 线性性：若 $[\bar{A}]\prec[\bar{B}]$，则对任意的 $[\bar{C}]\in I(\mathbf{R})$ 及实数 $k\geqslant 0$，一定有 $[\bar{A}]+[\bar{C}]\prec[\bar{B}]+[\bar{C}]$，$k[\bar{A}]\prec k[\bar{B}]$。

2.1.2 二元区间数的相关界定

定义 2.2 设有两个二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 和 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$，则

(1) $[\bar{A}]>[\bar{B}]$，当且仅当 $a^->b^-,a^+>b^+$。

(2) $[\bar{A}]=[\bar{B}]$，当且仅当 $a^-=b^-,a^+=b^+$。

(3) $[\bar{A}]<[\bar{B}]$，当且仅当 $a^-<b^-,a^+<b^+$。

定义 2.3 设任意两个二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 和 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$，令

$$d([\bar{A}],[\bar{B}])=[\min\{|b^--a^-|,|b^+-a^+|\},\max\{|b^--a^-|,|b^+-a^+|\}] \tag{2-3}$$

则称 $d([\bar{A}],[\bar{B}])$ 为二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 和 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$ 的相离度。

定义 2.4 设有二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，则二元区间数 $[\bar{A}]$ 的补集

$$[\bar{\bar{A}}]=[1-a^+,1-a^-] \tag{2-4}$$

定义 2.5 设二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，则称 $E[[\bar{A}]]=\dfrac{a^-+a^+}{2}$ 为二元区间数 $[\bar{A}]$ 的期望值。

定义 2.6 设二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，则称 $W[[\bar{A}]]=\dfrac{a^+-a^-}{2}$ 为二元区间数 $[\bar{A}]$ 的宽度。

定义 2.7 对于二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，则称

$$f_{[\bar{A}]}(x)=a^-+(a^+-a^-)x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{2-5}$$

为二元区间数的排序函数。

定义 2.8 依据徐泽水教授、刘家学教授等提出的排序函数[57~61]，本章将其推广到二元区间数上。对于两个二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 和 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$，及 $0\leqslant x\leqslant 1$，则

(1) 若二元区间数的排序函数 $f_{[\bar{A}]}(x)<f_{[\bar{B}]}(x)$，称 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 次于 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$，记为 $[\bar{A}]<[\bar{B}]$。

(2) 二元区间数的排序函数 $f_{[\bar{A}]}(x)>f_{[\bar{B}]}(x)$，称 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 优于

$[\bar{B}]=[b^-,b^+]$，记为 $[\bar{A}]\succ[\bar{B}]$。

(3) 二元区间数的排序函数 $f_{[\bar{A}]}(x)=f_{[\bar{B}]}(x)$，称 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 等于 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$，记为 $[\bar{A}]=[\bar{B}]$。

定义 2.9 设任意二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 和 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$，且集合 $\{x|f_{[\bar{A}]}(x)>f_{[\bar{B}]}(x)\}$ 非空，令

$$x_0=\inf\{x|f_{[\bar{A}]}(x)>f_{[\bar{B}]}(x)\} \tag{2-6}$$

则称 $\delta=1-x_0$ 为 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 大于 $[\bar{B}]=[b^-,b^+]$ 的可信度。

定义 2.10 依据学者张兴芳教授提出的心态指标，本章将其推广到二元区间数。设 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$ 为二元区间数，记 $E_{[\bar{A}]}=\frac{a^-+a^+}{2}$，$W_{[\bar{A}]}=\frac{a^+-a^-}{2}$，在 $[0,1]$ 上定义函数：$F_{[\bar{A}]}(\lambda):[0,1]\to[a^-,a^+]$，即

$$F_{[\bar{A}]}(\lambda)=E_{[\bar{A}]}+(2\lambda-1)W_{[\bar{A}]} \tag{2-7}$$

则称 λ 为决策者对的心态指标，显然 $F_{[\bar{A}]}(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上的单调递增函数，而且

(1) 当 $\lambda=0$ 时，$F_{[\bar{A}]}(\lambda)=a^-$，则称 λ 为下限指标，表示决策者持悲观心态。

(2) 当 $\lambda=1$ 时，$F_{[\bar{A}]}(\lambda)=a^+$，则称 λ 为上限指标，表示决策者持乐观心态。

(3) 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$F_{[\bar{A}]}(\lambda)=M_{[\bar{A}]}$，则称 λ 为中限指标，表示决策者持中庸心态。

2.2 二元区间数的运算关系

2.2.1 二元区间数的初级运算

令二元区间数 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，$[\bar{B}]=[b^-,b^+]$，它们之间的二元运算关系如下：

(1) 加法运算：

$$[\bar{A}]+[\bar{B}]=[a^-+b^-,a^++b^+]$$

(2) 减法运算：

$$[\bar{A}]-[\bar{B}]=[a^--b^-,a^+-b^+]$$

(3) 乘法运算：

$$[\bar{A}]\cdot[\bar{B}]=[a^-,a^+]\cdot[b^-,b^+]$$
$$=[\min(a^-b^-,a^-b^+,a^+b^-,a^+b^+),\max(a^-b^-,a^-b^+,a^+b^-,a^+b^+)]$$

特别地，当 $[\bar{A}]$ 和 $[\bar{B}]$ 为正二元区间数时，则

$$[\bar{A}]\cdot[\bar{B}]=[a^-,a^+]\cdot[b^-,b^+]=[a^-b^-,a^+b^+]$$

(4) 除法运算：

$$\frac{[\bar{A}]}{[\bar{B}]}=\frac{[a^-,a^+]}{[b^-,b^+]}=[a^-,a^+]\cdot\left[\frac{1}{b^+},\frac{1}{b^-}\right],\quad b^-,b^+\neq 0$$

特别地，当 $[\bar{A}]$ 和 $[\bar{B}]$ 为正二元区间数时，有

$$\frac{[\bar{A}]}{[\bar{B}]}=\frac{[a^-,a^+]}{[b^-,b^+]}=\left[\frac{a^-}{b^+},\frac{a^+}{b^-}\right]$$

(5) Hausdorff 距离运算：

$$d_H=\max\{|a^--b^-|,|a^+-b^+|\}$$

其中，$[\bar{A}]$ 和 $[\bar{B}]$ 为正二元区间数。

(6) 倍数运算：

① 当 $k\geqslant 0$ 时，$k[\bar{A}]=[ka^-,ka^+]$；

② 当 $k<0$ 时，$k[\bar{A}]=[ka^+,ka^-]$。

(7) 极值运算：

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}[a_i^-,a_i^+]=\left[\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^-,\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^+\right]$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}[a_i^-,a_i^+]=\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^-,\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^+\right]$$

(8) 对数运算：

$$\ln[\bar{A}]=[\ln a^-,\ln a^+],\quad a^->0$$

(9) 指数关系：

$$c^{[\bar{A}]}=[c^{a^-},c^{a^+}]$$

其中，c 为正实数；$[\bar{A}]$ 为正二元区间数。

(10) 乘方运算：

$$[\bar{A}]^n=[a^-,a^+]^n=[(a^-)^n,(a^+)^n]$$

其中，$[\bar{A}]$ 为正二元区间数。

(11) 开方运算：

$$\sqrt[n]{[\bar{A}]}=[\sqrt[n]{a^-},\sqrt[n]{a^+}]$$

其中，$[\bar{A}]$ 为正二元区间数。

(12) 级数运算：

$$\sum_{i=1}^{n}[\bar{A}_i]=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^-,\sum_{i=1}^{n}a_i^+\right]$$

(13) 平均运算：

设 $[\bar{A}_1]=[a_1^-,a_1^+],[\bar{A}_2]=[a_2^-,a_2^+],\cdots,[\bar{A}_n]=[a_n^-,a_n^+]$，则二元区间数的平均运算为

$$\mathrm{Ave}[\bar{A}]=\left[\frac{a_1^-+a_2^-+\cdots+a_n^-}{n},\frac{a_1^++a_2^++\cdots+a_n^+}{n}\right]$$

(14) 二元区间数的模：

$$\left|[\bar{A}]\right|=\sqrt{(a^-)^2}+\sqrt{(a^+)^2}$$

2.2.2 二元区间数的高级运算

1. 二元区间数的级数运算

定义 2.11 设二元区间数数列 $[\bar{A}_1]=[a_1^-,a_1^+],[\bar{A}_2]=[a_2^-,a_2^+],\cdots,[\bar{A}_i]=[a_i^-,a_i^+],\cdots$，则称 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{A}_i]=[\bar{A}_1]+[\bar{A}_2]+\cdots+[\bar{A}_i]+\cdots$ 为二元区间数的级数，即

$$\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{A}_i]=\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^-,a_i^+]=\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+\right]\tag{2-8}$$

定义 2.12 记 $s_i^-=\sum_{k=1}^{i}a_k^-,s_i^+=\sum_{k=1}^{i}a_k^+$，对于二元区间数的级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{A}_i]=\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^-,a_i^+]=\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+\right]\tag{2-9}$$

定理 2.1 若极限 $\min\limits_{i\to\infty}s_i^-=a^-,\min\limits_{i\to\infty}s_i^+=a^+$ 都存在，则称二元区间数的级数是收敛，其和为 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，如果上述两个极限至少有一个不存在，则称二元区间数的级数是发散。

证明略。

性质 2.5　如果二元区间数的级数 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{A}_i]=\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^-,a_i^+]=\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+\right]$ 收敛于和 $[\bar{A}]=[a^-,a^+]$，且 k 是一个不为 0 的常数，则级数 $k\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{A}_i]$ 收敛于 $k[\bar{A}]=[ka^-,ka^+]$。

性质 2.6　如果二元区间数的级数 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{A}_i]=\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^-,a_i^+]=\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+\right]$ 是收敛的，则有

$$\min_{i\to\infty}a_i^-=0,\quad \min_{i\to\infty}a_i^+=0$$

性质 2.7　如果两个收敛的二元区间数的级数 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{A}_i]=[\bar{A}]$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{B}_i]=[\bar{B}]$，其逐项相加减的级数收敛，且

$$\sum_{i=1}^{\infty}([\bar{A}_i]+[\bar{B}_i])=[\bar{A}]+[\bar{B}] \tag{2-10}$$

2. 二元区间数的积分运算

定义 2.13　设 $[\bar{F}(x)]=[f(x)^-,f(x)^+]$，其中 $f(x)^-$ 和 $f(x)^+$ 均为实值函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)^-\leqslant f(x)^+$，称 $[\bar{F}(x)]=[f(x)^-,f(x)^+]$ 为二元区间数的函数。

定义 2.14　设二元区间数函数 $[\bar{F}(x)]=[f(x)^-,f(x)^+]$ 是 $D\subset\mathbf{R}$ 上的二元区间数的函数，若 $f(x)^-$ 和 $f(x)^+$ 在 $D\subset\mathbf{R}$ 上可积（黎曼意义下的）。则 $[\bar{F}(x)]=[f(x)^-,f(x)^+]$ 在 $D\subset\mathbf{R}$ 上也可积，其积分值

$$\int_D[F(x)]\mathrm{d}x=\left[\int_D f(x)^-\,\mathrm{d}x,\int_D f(x)^+\,\mathrm{d}x\right] \tag{2-11}$$

性质 2.8　若二元区间数的函数 $[\bar{F}(x)]=[f(x)^-,f(x)^+]$ 和 $[\bar{G}(x)]=[g(x)^-,g(x)^+]$ 均在 $D\subset\mathbf{R}$ 上可积，则

(1) $[\bar{F}(x)]\pm[\bar{G}(x)]$ 在 $D\subset\mathbf{R}$ 上可积，且

$$\int_D([\bar{F}(x)]\pm[\bar{G}(x)])\mathrm{d}x=\left[\int_D(f(x)^-\pm g(x)^-)\mathrm{d}x,\int_D(f(x)^+\pm g(x)^-)\mathrm{d}x\right] \tag{2-12}$$

(2) k 是常数，则收敛于 $k[\bar{F}(x)]$ 在 $D\subset\mathbf{R}$ 上可积，且

$$\int_D k\cdot[\bar{F}(x)]\mathrm{d}x=k\int_D[\bar{F}(x)]\mathrm{d}x \tag{2-13}$$

(3) 若在 $D\subset\mathbf{R}$ 上有 $[\bar{F}(x)]\subseteq[\bar{G}(x)]$，则

$$\int_D[\bar{F}(x)]\mathrm{d}x\subseteq\int_D[\bar{G}(x)]\mathrm{d}x \tag{2-14}$$

(4) 若二元区间数函数 $[\bar{F}(x)]=[f(x)^-,f(x)^+]$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $a<c<b$，则

$$\int_a^c[\bar{F}(x)]\mathrm{d}x+\int_c^b[\bar{F}(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b[F(x)]\mathrm{d}x \tag{2-15}$$

3. 二元区间数的方程组运算

定义 2.15 设二元区间数 $[\bar{A}_i]=[a_i^-,a_i^+]$，$[\bar{B}_i]=[b_i^-,b_i^+]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{cases}[\bar{A}_{11}]x_1+[\bar{A}_{12}]x_2+\cdots+[\bar{A}_{1n}]x_n=[\bar{B}_1]\\ [\bar{A}_{21}]x_1+[\bar{A}_{22}]x_2+\cdots+[\bar{A}_{2n}]x_n=[\bar{B}_2]\\ \qquad\vdots\\ [\bar{A}_{n1}]x_1+[\bar{A}_{n2}]x_2+\cdots+[\bar{A}_{nn}]x_n=[B_n]\end{cases} \tag{2-16}$$

称为含二元区间数的非齐次项线性方程组。记

$$[\tilde{A}]=\begin{bmatrix}[\bar{A}_{11}] & [\bar{A}_{12}] & \cdots & [\bar{A}_{1n}]\\ [\bar{A}_{21}] & [\bar{A}_{22}] & \cdots & [\bar{A}_{2n}]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [\bar{A}_{n1}] & [\bar{A}_{n2}] & \cdots & [\bar{A}_{nn}]\end{bmatrix}$$

$$[\tilde{B}]=\begin{bmatrix}[\bar{B}_1]\\ [\bar{B}_2]\\ \vdots\\ [\bar{B}_n]\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

式(2-16)可写为

$$[\widetilde{A}]X = [\widetilde{B}] \tag{2-17}$$

总之,本章在定义二元区间数基本概念的基础上,研究了二元区间数的基本运算(包括初级运算和高级运算),给出了二元区间数的一些相关概念界定,并对二元区间数的排序进行了初步研究。由于二元区间数是一个新事物,所以对二元区间数的排序指标研究较少,有待于在具体应用中做进一步的详细探讨。

第3章　基于二元区间数的灰色关联决策模型

针对带有方案偏好信息的多指标决策问题，利用区间数理论和灰色关联度知识进行了综合研究。依据第2章界定的二元区间数基本运算，在构造四级标度区间的基础上，给出了方案偏好信息的客观区间值，并提出了基于灰色关联度、方案偏好信息值和客观信息熵的灰色关联决策模型。在利用非线性规划中的极值原理确定各指标权重的情况下，计算出每个决策方案决策区间值，并依据决策区间值对所有决策方案进行择优排序。

3.1　问题描述

多指标决策问题在工程、经济、管理、交通等多领域是一个十分活跃的课题，其实质是利用已有的决策信息通过一定的方式对备选方案进行排序并择优。但由于客观事物的复杂性和不确定性以及人类认识的模糊性和局限性，多目标决策问题还要进一步探索。由于决策的根本问题就是决策主体关于客体的价值判断。所以，决策对象总与决策者不可分割地共处一个系统之中，决策对象不可避免地受到决策者的影响，即决策中的方案偏好问题。为了解决这一问题，许多学者进行了大量研究[62~69]，但是这些成果不够完善和系统，主要表现在：

(1) 利用客观信息熵，建立带有方案偏好信息的优化决策模型，但没有考虑信息的差异性，得到的决策结果应用性差。

(2) 依据灰色系统理论，在兼顾主观和客观的统一性的基础上，建立了最小二乘优化决策模型，客观性很好，但没有考虑方案偏好信息。

(3) 研究了在不完全信息下的方案偏好排序法，对于信息完全未知方案偏好问题没有进行更深层次的研究，并且通过对各属性进行因素分析以得到属性变化之间的关系计算，其计算过程比较繁琐。

(4) 研究了基于区间数的部分信息下的方案偏好排序法，但只限于指标权重系数取值为实数的决策，没有考虑未知信息的方案偏好问题。

因此，这些研究成果对决策理论方法的研究做出了重大的贡献，但对方案偏好问题的研究还不够完善，尤其在理论上有待进一步的探索。

学者们在研究方案偏好问题时，经常遇到许多界线不清的模糊问题，需要处理不精确的数据，如果过分追求数学上的严谨和精密，将会阻碍决策过程的正常进行。所以，决策者在对每一个属性的重要程度进行估计时，其认识通常不能完全用

一个普通实数来表示，而是一个区间数，即二元区间数。所以，二元区间数在决策分析等领域有非常强的应用背景。特别在实际多目标决策过程中，当决策者往往不能明确地给出属性权重和属性值时，用二元区间数的形式来描述属性权重和属性值能够得到满意的结果。根据实际情况的复杂性研究方案偏好问题时，不但要考虑信息的客观熵值，而且根据灰色系统中黑色、白色和灰色信息的分类，还得考虑信息的关联度。因此，可以根据灰色关联度、方案偏好信息值和客观信息熵来进行综合研究方案偏好问题。本章在综合考虑的基础上，利用界定的四级标度区间来确定方案的偏好信息区间值，然后根据灰色系统中的信息分类和信息论中的有无信息偏好等知识，对权重未知的决策问题构建数学模型，提出用二元区间数来研究方案偏好问题。

3.2　带有方案偏好信息的灰色关联决策原理

在实际解决一个多指标决策问题时，由于有些属性难以用数值表示，再加上要决策者精确地表达自己的偏好往往有较大的困难，试图通过简单地根据决策者的偏好构造价值函数，并由此找出决策者最偏好的行动方案往往是不成功的[67]。因此，本章为了避免建立价值函数的主观性，而用二元区间数来评估决策者的偏好信息，确定决策者最偏好的行动方案来解决多指标决策问题。由于灰色关联分析法是一种多因素统计分析方法，它是以因素的样本数据为依据用灰色关联度来描述因素之间关系的强弱、大小和次序的。即如果样本数据列反映出两因素变化的态势(大小、方向、速度等)基本一致，则它们之间的关联度较大；反之，关联度较小[17]。所以，本章可以用灰色关联分析法来研究方案偏好信息的决策问题。

3.2.1　决策矩阵的标准化处理

多指标决策问题是利用已有的决策信息，通过一定的方式对备选方案进行排序并择优。所以，对于权重未知的多指标决策问题：方案集记为 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$；指标集记为 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$；指标的权重向量记为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$。

令方案集 A_i 关于属性集(指标集) G_j 的决策矩阵

$$Y=([y_{ij}^-,y_{ij}^+])_{n\times m}$$

其中，$[y_{ij}^-,y_{ij}^+]=f_i([x_j^-,x_j^+])(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 为方案 A_i 对指标 G_j 的属性区间值。

由于常见的指标类型有：效益型(越大越好)、成本型(越小越好)和固定型(越接近某个值越好)，为了消除各指标值之间的不可公度性及矛盾性，将决策矩阵标准化处理，令

（1）效益型指标：

$$[z_{ij}^-,z_{ij}^+]=\left([y_{ij}^-,y_{ij}^+]-\min_{1\leqslant i\leqslant n}[y_{ij}^-,y_{ij}^+]\right)\Big/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}[y_{ij}^-,y_{ij}^+]-\min_{1\leqslant i\leqslant n}[y_{ij}^-,y_{ij}^+]\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

（2）成本型指标：

$$[z_{ij}^-,z_{ij}^+]=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}[y_{ij}^-,y_{ij}^+]-[y_{ij}^-,y_{ij}^+]\right)\Big/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}[y_{ij}^-,y_{ij}^+]-\min_{1\leqslant i\leqslant n}[y_{ij}^-,y_{ij}^+]\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

（3）固定型指标：

$$[z_{ij}^-,z_{ij}^+]=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}[y_{ij}^-,y_{ij}^+]-|[y_{ij}^-,y_{ij}^+]-[\overline{y}^{(*)}]|\right)\Big/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|[y_{ij}^-,y_{ij}^+]-[\overline{y}^{(*)}]|\right)$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

其中，$[\overline{y}^{(*)}]=[y_{ij}^{-(*)},y_{ij}^{+(*)}]$ 为定值区间。

记标准化后的决策矩阵为 $Z=([z_{ij}^-,z_{ij}^+])_{n\times m}$，则方案的综合属性值区间为

$$[f_i^-,f_i^+]=\sum_{j=1}^{m}w_j\cdot[z_{ij}^-,z_{ij}^+],\quad i=1,2,\cdots,n$$

在有限方案的多属性决策中，综合属性值区间 $[f_i^-,f_i^+]$ 越大，对应的方案 A_i 就越优。

3.2.2 方案偏好信息值的确定

决策者在多个备选方案中，挑选其最满意的方案时，往往根据方案的属性及决策者的偏好，采用两两比较的办法，来评定两个方案之间的优先顺序。由于大系统的决策往往是由多个决策者共同制定的，为了吸取众多专家的意见，本书提出了一种基于二元区间数的综合决策模型。该模型利用集值统计的方法，对评判矩阵和诸因素的权重分配均用正有界闭区间表示，并且给出了一种二元区间数的排序方法和决策准则。在此基础上建立了基于区间值模糊集的数学模型。针对现有二元区间数综合决策模型中，生成区间数所依据的线段法的不足，以刀切法思想为基础，通过模型的稳定性分析，借鉴属性识别理论，提出了一种以增强模型稳定性为目的的改进方法——四级标度区间法，使得改进后的模型能够充分利用原始决策信息，从而使决策结果更加客观。

四级标度区间法是为了实现决策者的客观偏好与方案的主观偏好间偏差最小化，利用极值理论中的拉格朗日函数来建立非线性数学模型，并用函数求导进行求解权重系数。本章依据刘家学教授提出的偏好关系[68]，给出一种方便而有效的四级标度法以确定对方案的偏好信息值。主要利用二元区间数的知识，考虑决策者主观偏好的基础上，实现决策结果的科学性。令方案 A_i 对方案 A_k 的四级标度赋值为 f_{ik}（这里 f_{ik} 为一个二元区间数），决策者可以按下述方法给 f_{ik} 判断赋值区

间，见表 3-1。

表 3-1　四级标度区间

序号	内容	f_{ik} 取值	f_{ki} 取值
1	方案 A_i 与方案 A_k 同等偏好	[3,6]+[0,0]	[3,6]−[0,0]
2	方案 A_i 比方案 A_k 稍微偏好	[3,6]+[1,1]	[3,6]−[1,1]
3	方案 A_i 比方案 A_k 明显偏好	[3,6]+[2,2]	[3,6]−[2,2]
4	方案 A_i 比方案 A_k 特别偏好	[3,6]+[3,3]	[3,6]−[3,3]

由表 3-1 可知，在确定决策者偏好的决策方案之前，决策者的偏好结构已经通过四级标度区间表现出来，而不是在决策中通过迭代逐步诱导出来。由表 3-1 得到方案偏好赋值区间矩阵 $D=([f_{ij}^-,f_{ij}^+])_{n\times m}$，再计算各个方案的四级标度区间偏好优序数

$$[t_i^-,t_i^+]=\sum_{k=1}^{n}[f_{ik}^-,f_{ik}^+],\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3-1}$$

由此得到对各方案的偏好信息区间值为

$$[p_i^-,p_i^+]=[t_i^-,t_i^+]\Big/\sum_{k=1}^{n}[t_k^-,t_k^+],\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3-2}$$

3.2.3　灰色关联度的确定

灰色关联度作为测定方案优劣尺度的基本思想是：对方案数据序列几何关系和曲线几何形状的相似程度进行比较分析，以曲线间相似程度的大小作为关联程度的衡量尺度[9]。按照灰色关联理论，依据二元区间数理论，通过计算其综合关联度，给出定量的数值评定结果。利用综合关联度进行综合定量分析，利用二元区间数理论将多指标的决策归结为单目标决策，来直观全面地衡量决策系统的和谐状态，从而为决策者提供了客观、公正、准确、合理的决策依据。同时解决了决策系统中的信息不完全、决策指标较多、部分指标之间存在相差或重复的问题。

所以，对规范化后的决策矩阵 $Z=([z_{ij}^-,z_{ij}^+])_{n\times m}$ 可做如下定义：

定义 3.1　基于二元区间数的理想方案的各指标属性值向量

$$[\overrightarrow{H}]=([\bar{h}_1],[\bar{h}_2],\cdots,[\bar{h}_m]) \tag{3-3}$$

其中，$[\bar{h}_i]=[h_i^-,h_i^+]=([z_{1i}^-,z_{1i}^+],[z_{2i}^-,z_{2i}^+],\cdots,[z_{ni}^-,z_{ni}^+])(i=1,2,\cdots,m)$。

定义 3.2　第 i 方案与理想方案关于第 j 指标的关联系数区间

$$[\zeta_{ij}^-,\zeta_{ij}^+]=\frac{\max\limits_i\max\limits_j|[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[h_j^-,h_j^+]|+\rho\max\limits_i\min\limits_j|[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[h_j^-,h_j^+]|}{|[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[h_j^-,h_j^+]|+\rho\max\limits_i\max\limits_j|[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[h_j^-,h_j^+]|} \tag{3-4}$$

其中，ρ 为分辨系数，一般取值为 0.5。

令各指标的权重向量为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$，则第 i 方案对理想方案的关联度区间为

$$[r_i^-,r_i^+]=\sum_{k=1}^{n}w_j\cdot[\zeta_{ik}^-,\zeta_{ik}^+],\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3-5}$$

3.2.4 客观信息熵的确定

在信息论中，熵值是系统无序程度或混乱程度的度量，信息被解释为系统无序程度的减少，信息表现为系统的等项指标的变异度。所以由熵的思想知道，人们在决策中得到信息的数量和质量，是决策的精度和可靠性大小的决定因素之一。当各被决策对象在指标下的值相差较大时，则熵值较小。当熵值较大时，说明该指标向决策者提供了信息。所以对标准化决策区间矩阵 $Z=([z_{ij}^-,z_{ij}^+])_{n\times m}$，令

$$[p_{ij}^-,p_{ij}^+]=\frac{[z_{ij}^-,z_{ij}^+]}{\sum_{k=1}^{n}[z_{kj}^-,z_{kj}^+]},\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m \tag{3-6}$$

由信息论知，指标 G_j 输出的信息熵区间

$$[e_j^-,e_j^+]=-(\ln n)^{-1}\sum_{j=1}^{m}([p_{ij}^-,p_{ij}^+]\cdot\ln[p_{ij}^-,p_{ij}^+]),\quad j=1,2,\cdots,m \tag{3-7}$$

所以当指标 G_j 的客观权重为

$$[u_j^-,u_j^+]=([1,1]-[e_j^-,e_j^+])\Big/\sum_{k=1}^{m}([1,1]-[e_k^-,e_k^+]),\quad j=1,2,\cdots,m \tag{3-8}$$

得到方案 A_i 的客观信息熵决策区间值为

$$[q_i^-,q_i^+]=\sum_{j=1}^{m}[u_j^-,u_j^+]\cdot[z_{ij}^-,z_{ij}^+],\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3-9}$$

3.3 决策模型的构建

多指标决策是多目标决策的一种，是指对于给定的有限个方案，决策者根据事先确定的各个方案基于属性值按照某种决策准则进行多个方案排序，所以在考虑主客观统一的基础上，兼顾方案的偏好性和信息的灰色性，来建立符合客观实际的决策模型。由于客观事物的复杂性、不确定性，属性的权重值很难确定。目前，确定权重值的方法主要有两类：主观赋权法和客观赋权法。主观赋权法是决策者根据主观判断或各指标的主观重视程度进行赋权的方法，如专家调查法、AHP 法等；

客观赋权法是通过建立一定的数学模型计算出权重系数，如主成分分析法、均方差法等。由于本章即使能够给出权重的可能变化范围，但属性的不确定性仍会引起决策方案排序的不确定性，所以要客观地确定多属性的权重。因为前文已经考虑了信息的偏好问题，所以必须采用统一的权重，才能进行综合评判，从中选取最佳方案。这里采用拉格朗日函数来确定权重值。

因为各项指标的权重向量为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$，所以对所有指标而言，方案 A_i 的决策区间值

$$[f_j^-,f_j^+]=\sum_{j=1}^{m}w_j\cdot[z_{ij}^-,z_{ij}^+],\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3-10}$$

由于方案 A_i 的决策区间值 $[f_j^-,f_j^+]$ 距方案偏好信息值 $[p_i^-,p_i^+]$、客观信息熵方案值 $[q_i^-,q_i^+]$ 和灰色关联度 $[r_i^-,r_i^+]$ 的偏差越小越好，所以本章建立如下灰色关联度决策模型：

模型 1　$\min F(W)=$

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[p_i^-,p_i^+]\Big)^2+\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[r_i^-,r_i^+]\Big)^2 +\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[q_i^-,q_i^+]\Big)^2\Big] \tag{3-11}$$

$$\text{s.t.}:\sum_{j=1}^{m}w_j=1,\quad w_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,m$$

为了模型求解，做拉格朗日函数并对 $w_j(j=1,2,\cdots,m)$ 和 λ 求导，且令它们等于 0。即令

$$L=\sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[p_i^-,p_i^+]\Big)^2+\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[r_i^-,r_i^+]\Big)^2 +\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[q_i^-,q_i^+]\Big)^2\Big]+2\lambda\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j-1\Big)$$

则

$$\frac{\partial L}{\partial w_j}=\sum_{i=1}^{n}\Big[2\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[p_i^-,p_i^+]\Big)+2\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[r_i^-,r_i^+]\Big) +2\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j[z_{ij}^-,z_{ij}^+]-[q_i^-,q_i^+]\Big)\Big]+2\lambda=0 \tag{3-12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=2\Big(\sum_{j=1}^{m}w_j-1\Big)=0 \tag{3-13}$$

则式(3-12)变形为

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{m}w_k[z_{ik}^-,z_{ik}^+]-\frac{[q_i^-,q_i^+]+[r_i^-,r_i^+]+[p_i^-,p_i^+]}{2}\Big)[z_{ij}^-,z_{ij}^+]\Big]+\lambda=0 \tag{3-14}$$

将式(3-13)、式(3-14)表示的 $m+1$ 个变量、$m+1$ 个方程的方程组用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} Q_{m\times m} & E_{m\times 1} \\ E_{1\times m}^{T} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{m\times 1} \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{m\times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3-15}$$

其中

$$W_{m\times 1}=(w_1, w_2, \cdots, w_m)^{T}$$

$$Q_{m\times m}=([q_{rs}^{-}, q_{rs}^{+}])_{m\times m}$$

且

$$[q_{rs}^{-}, q_{rs}^{+}]=\sum_{k=1}^{m}[z_{rk}^{-}, z_{rk}^{+}]\cdot[z_{ks}^{-}, z_{ks}^{+}], \quad r, s=1,2,\cdots,n$$

$$C_{m\times 1}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\frac{[q_i^{-}, q_i^{+}]+[r_i^{-}, r_i^{+}]+[p_i^{-}, p_i^{+}]}{2}[z_{i1}^{-}, z_{i1}^{+}], \cdots, \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{[q_{im}^{-}, q_{im}^{+}]+[r_{im}^{-}, r_{im}^{+}]+[p_{im}^{-}, p_{im}^{+}]}{2}[z_{im}^{-}, z_{im}^{+}] \end{Bmatrix}^{T}$$

$$E_{m\times 1}=([1,1],[1,1],\cdots,[1,1])^{T}$$

由矩阵方程式(3-15)解得

$$W_{m\times 1}=Q_{m\times m}^{-1}\cdot\left(C_{m\times 1}+\frac{1-E_{1\times m}^{T}Q_{m\times m}^{-1}C_{m\times 1}}{E_{1\times m}^{T}Q_{m\times m}^{-1}C_{m\times 1}}E_{m\times 1}\right) \tag{3-16}$$

解出 $W_{m\times 1}=(w_1, w_2, \cdots, w_m)^{T}$ 后，得方案 A_i 的决策区间值 $[f_i^{-}, f_i^{+}]$。

若 $[f_i^{-}, f_i^{+}]=\max\{[f_i^{-}, f_i^{+}] \mid i=1,2,\cdots,n\}$，则第 i 个方案为最佳方案。

3.4 案例分析

2005年某市根据现有的公交线路网络，在考虑城市发展的基础上，有关部门提出5种公交线网的优化调整方案，然后要求相关部门在这5种方案中选出一种最佳的优化方案。其中考察的指标有：公交企业经济效益 G_1、线网覆盖率 G_2、线路重复系数 G_3、乘客直达率 G_4、乘客总出行时间 G_5、线路网络日均满载率 G_6。设5种优化方案为：方案1、方案2、方案3、方案4、方案5，则对各方案的指标进行考察情况见表3-2。

表 3-2 指标考察值

方案	G_1 /万元	G_2 /%	G_3 /%	G_4 /%	G_5 /min	G_6 /%
方案1	1886.1	59.5	25.5	60.5	35	60
方案2	1007.5	75.5	18.5	55.5	20	40
方案3	1356.8	50.2	15.5	45.5	30	90
方案4	566.6	65.8	22.5	50.6	25	50
方案5	998.5	80.5	17.3	40.5	25	80

所以决策矩阵为

$$Y=\begin{bmatrix}35 & 59.5 & 60.5 & 25.5 & 60 & 1886.1\\ 20 & 75.5 & 55.5 & 18.5 & 40 & 1007.5\\ 30 & 50.2 & 45.5 & 15.5 & 90 & 1356.8\\ 25 & 65.8 & 50.6 & 22.5 & 50 & 566.6\\ 25 & 80.5 & 40.5 & 17.5 & 80 & 998.5\end{bmatrix}$$

标准化处理后的决策矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}0 & 0.307 & 0 & 1 & 0.250 & 1\\ 1 & 0.835 & 0.700 & 0.750 & 0.500 & 0.334\\ 0.333 & 0 & 1 & 0.250 & 1 & 0.599\\ 0.667 & 0.505 & 0.300 & 0.505 & 0 & 0\\ 0.667 & 1 & 0.820 & 0 & 0.750 & 0.327\end{bmatrix}$$

由某市交通管理部门的决策者对 4 种方案的不同偏好程度，按四级标度赋值区间得偏好矩阵

$$D=\begin{bmatrix}[0,3] & [2,5] & [3,6] & [2,5] & [1,4]\\ [2,5] & [3,6] & [2,5] & [4,7] & [2,5]\\ [5,8] & [2,5] & [6,9] & [2,5] & [4,7]\\ [3,6] & [1,4] & [3,6] & [5,8] & [2,5]\\ [4,7] & [2,5] & [5,8] & [3,6] & [3,6]\end{bmatrix}$$

步骤 1　由式(3-5)得主观信息偏好区间值为

$[p_1^-,p_1^+]=[0.6227,0.7115]$，　$[p_2^-,p_2^+]=[0.6453,0.7371]$

$[p_3^-,p_3^+]=[0.6533,0.7583]$，　$[p_4^-,p_4^+]=[0.6638,0.7793]$

$[p_5^-,p_5^+]=[0.6339,0.7447]$

步骤 2　由式(3-9)得关联度区间为

$[r_1^-,r_1^+]=[0.1817,0.2137]$，　$[r_2^-,r_2^+]=[0.1723,0.2072]$

$[r_3^-,r_3^+]=[0.1903,0.2231]$，　$[r_4^-,r_4^+]=[0.1707,0.1993]$

$[r_5^-,r_5^+]=[0.1811,0.1998]$

步骤 3　由式(3-9)得信息熵区间为

$[q_1^-,q_1^+]=[0.7321,0.8213]$，　$[q_2^-,q_2^+]=[0.7571,0.8373]$

$[q_3^-,q_3^+]=[0.7783,0.8577]$，　$[q_4^-,q_4^+]=[0.7901,0.8835]$

$[q_5^-,q_5^+]=[0.7801,0.8387]$

步骤 4　由式(3-16)得各指标权重向量区间为

$$[\vec{W}]=([0172,0.186],[0.159,0.163],[0.137,0.149],[0.168,0.178],[0.147,0.159],[0.167,0.176])^T$$

步骤 5　由式(3-10)得 5 种优化方案的决策区间值为

$$[f_1^-, f_1^+] = [0.3723, 0.5421], \quad [f_2^-, f_2^+] = [0.5213, 0.7351]$$

$$[f_3^-, f_3^+] = [0.4237, 0.6382], \quad [f_4^-, f_4^+] = [0.2992, 0.4727]$$

$$[f_5^-, f_5^+] = [0.4113, 0.6177]$$

步骤 6　依据二元区间数的排序原则可知

$$[f_2^-, f_2^+] > [f_3^-, f_3^+] > [f_5^-, f_5^+] > [f_1^-, f_1^+] > [f_4^-, f_4^+]$$

所以，由优化结果可以知道 5 种方案的排序为

方案 2>方案 3>方案 5>方案 1>方案 4

其中方案 2 为最佳方案。

总之，本章利用灰色系统理论、信息论和区间数理论，在对带有方案偏好信息量化的基础上，通过利用拉格朗日函数求解单目标优化模型得到各指标的权重值，并利用二元区间数的运算关系和关联度区间值的大小对所有待选方案进行排序和择优。由于在决策过程中，既考虑了信息的透明度原则，并兼顾了方案偏好信息和客观信息熵，又避免了权重的主观性问题，所以该模型在实际应用中有一定的使用价值。并且应用分析表明，在利用四级标度区间确定方案偏好值的情况下，用基于二元区间数的关联度对不确定性多指标决策问题进行研究是可行的。

第 4 章　基于物元矩阵的理想区间决策模型

针对权重未知的多指标决策问题，利用可拓学中的物元矩阵和运筹学中的理想点法进行综合研究。依据二元区间数的相关定义和运算关系，在自定义方案指标矩阵、方案标准指标矩阵、正理想方案指标矩阵和负理想方案指标矩阵等的基础上，依据决策方案到正负理想方案指标矩阵距离大小，来构建多指标决策的数学模型，并给出决策模型的求解过程。最后依据极值原理，利用拉格朗日函数得到各个决策指标的权重系数值。

4.1　问题描述和基本定义

多指标决策是利用一定的函数关系式对有限个决策方案在有限个属性下的信息值进行综合集成，进而对方案进行排序和择优的过程。多指标决策问题的研究已经取得了许多研究成果，并成功应用于各种实际生活，如投资决策、交通评估、方案评价、军事管理与系统决策等。在这些方法中理想决策法应用最为广泛，但把理想决策法应用于可拓学中的研究，目前还没有这方面的研究成果。物元分析法是由我国可拓学工作者创造的多元数据量化决策的一种新方法。建立多指标性能参数的质量综合评判的物元分析模型，并以定量的数值表示其评定结果。由于在可拓学的多目标决策理论中，应用因素指标值的几何除法来计算各方案对相对最佳方案的偏离程度[9]，这只是一种单方向(即只限于某因素指标)的偏差，并没有考虑整个因素指标空间的影响。而理想决策法是在定义适当距离测度的基础上，求各个被选方案到理想方案的距离，由于不同决策者定义的距离测度不同，所以理想决策法存在一定的主观因素。因此可拓学的多目标优化理论和运筹学中的理想决策法都有自己的缺点和不足，本章利用物元分析矩阵，依据理想决策原理，运用二元区间数的基本运算关系，构建一种基于二元区间数和物元矩阵的理想决策模型，并将其应用于城市公交线网优化方案的排序问题。

4.1.1　问题描述

设多指标决策问题有 n 个待选方案，m 个决策指标。记 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$ 为方案集；指标集为 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$。其中 $Y=([y_{ij}])_{n\times m}$ 表示方案集 A_i 关于指标集 G_j 的决策区间矩阵，且

$$[y_{ij}]=f_i(x_j)=[y_{ij}^-,y_{ij}^+],\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m$$

为方案 A_i 对指标 G_j 的属性值。

指标权重向量定义为 $W=(w_1,w_2,w_3,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 且 $w_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，$\sum_{i=1}^{m}w_i=1$。

根据决策单元提供或决策者收集的各指标信息得到的决策区间矩阵见表 4-1，表中的 $[\bar{y}_{ij}]=[y_{ij}^-,y_{ij}^+](i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$。

表 4-1 决策矩阵

方 案	指标 G_1	指标 G_2	…	指标 G_m
方案 A_1	$[\bar{y}_{11}]$	$[\bar{y}_{12}]$	…	$[\bar{y}_{1m}]$
方案 A_2	$[\bar{y}_{21}]$	$[\bar{y}_{22}]$	…	$[\bar{y}_{2m}]$
⋮	⋮	⋮		⋮
方案 A_n	$[\bar{y}_{n1}]$	$[\bar{y}_{n2}]$	…	$[\bar{y}_{nm}]$

4.1.2 基本定义

定义 4.1 方案指标矩阵是用基于二元区间数的物元矩阵来表示方案 A_i 指标值。即

$$Y_i=\begin{bmatrix}A_i & G_1 & [\bar{y}_{i1}]\\ & G_2 & [\bar{y}_{i2}]\\ & \vdots & \vdots\\ & G_m & [\bar{y}_{im}]\end{bmatrix}\begin{matrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_m\end{matrix},\quad i=1,2,3,\cdots,n \tag{4-1}$$

其中，$[\bar{y}_{ij}]=[y_{ij}^-,y_{ij}^+](j=1,2,\cdots,m)$。

由于各指标的含义不同，指标值的计算方法也不同，造成各个指标的量纲各异。因此，即使各指标定量化了，也不能直接进行计算，必须先对指标进行标准化处理。所以，为了使各指标有公度性，依据物元分析理论，通过构造关联函数将各指标进行标准化处理。设

$$J^+=\{效益型指标\},\quad J^-=\{成本型指标\}$$
$$J^{\text{fixed}}=\{固定型指标\},\quad J^{\text{interval}}=\{区间型指标\}$$

构造关联区间函数

$$[\bar{r}_{ij}]=[r_{ij}^-,r_{ij}^+]=k([\bar{y}_{ij}])$$

其中，$k([\bar{y}_{ij}])$ 在 $\langle a_j,b_j\rangle$ 区域内满足大于 0 且 $a_j=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}^-,b_j=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}^+$。则

$$(1)\ [\bar{r}_{ij}]=k([\bar{y}_{ij}])=\begin{cases}[1,1], & y_{ij}^+\geqslant b_j\\ \left[\dfrac{y_{ij}^--a_j}{b_j-a_j},\dfrac{y_{ij}^+-a_j}{b_j-a_j}\right], & [\bar{y}_{ij}]\subset\langle a_j,b_j\rangle,\quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^+\\ [0,0], & y_{ij}^-\leqslant a_j\end{cases}$$

$$(2)\ [\bar{r}_{ij}] = k([\bar{y}_{ij}]) = \begin{cases} [0,0], & y_{ij}^{+} \geqslant b_j \\ \left[\dfrac{y_{ij}^{-} - a_j}{b_j - a_j}, \dfrac{y_{ij}^{-} - a_j}{b_j - a_j}\right], & [\bar{y}_{ij}] \subset \langle a_j, b_j \rangle, \quad i = 1,2,\cdots,n; j \in J^{-} \\ [1,1], & y_{ij}^{-} \leqslant a_j \end{cases}$$

$$(3)\ [\bar{r}_{ij}] = k([\bar{y}_{ij}]) = \begin{cases} [1,1] - \left[\dfrac{|y_{ij}^{-} - v_{*}^{-}|}{|b_j - v_{*}^{-}|}, \dfrac{|y_{ij}^{+} - v_{*}^{+}|}{|a_j - v_{*}^{-}|}\right], & a_j \neq v_{*}^{-} \text{ 且 } b_j \neq v_{*}^{+} \\ [1,1], & a_j = v_{*}^{-} \text{ 或 } b_j = v_{*}^{+} \end{cases}$$

其中，$[\bar{v}_{*}] = [v_{*}^{-}, v_{*}^{+}]$ 为固定区间值；$i = 1,2,\cdots,n; j \in J^{\text{fixed}}$。

$$(4)\ [\bar{r}_{ij}] = k([\bar{y}_{ij}])$$

$$= \begin{cases} \left[1 - \dfrac{\max\{e_1^j - y_{ij}^{+}, y_{ij}^{+} - e_2^j\}}{\max\{e_1^j - a_j, b_j - e_2^j\}}, 1 - \dfrac{\max\{e_1^j - y_{ij}^{-}, y_{ij}^{-} - e_2^j\}}{\max\{e_1^j - a_j, b_j - e_2^j\}}\right], & [\bar{y}_{ij}] \not\subset [e_1^j, e_2^j] \\ [1,1], & [\bar{y}_{ij}] \subseteq [e_1^j, e_2^j] \end{cases}$$

其中，$[e_1^j, e_2^j]$ 为固定区间；$i = 1,2,\cdots,n; j \in J^{\text{interval}}$。

定义 4.2　方案标准指标矩阵是基于二元区间数对方案指标矩阵进行标准化处理后的物元矩阵。则方案 A_i 标准指标矩阵为

$$R_i = \begin{bmatrix} A_i & G_1 & [\bar{r}_{i1}] \\ & G_2 & [\bar{r}_{i2}] \\ & \vdots & \vdots \\ & G_m & [\bar{r}_{im}] \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{matrix}, \quad i = 1,2,3,\cdots,n \tag{4-2}$$

其中，$[\bar{r}_{ij}] = [r_{ij}^{-}, r_{ij}^{+}]$。

定义 4.3　基于二元区间数的正理想方案指标矩阵和负理想方案指标矩阵。令

$$[\bar{r}_j^{(+)}] = \begin{cases} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} [\bar{r}_{ij}], & \text{当 } j \in J^{+} \text{ 时} \\ \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} [\bar{r}_{ij}], & \text{当 } j \in J^{-} \text{ 时} \\ \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |[\bar{r}_{ij}] - [1,1]|, & \text{当 } j \in J^{\text{interval}} \text{ 时} \\ \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |[\bar{r}_{ij}] - [\bar{v}_{*}]|, & \text{当 } j \in J^{\text{fixed}} \text{ 时} \end{cases}$$

$$[\bar{r}_j^{(-)}] = \begin{cases} \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} [\bar{r}_{ij}], & \text{当 } j \in J^{+} \text{ 时} \\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} [\bar{r}_{ij}], & \text{当 } j \in J^{-} \text{ 时} \\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |[\bar{r}_{ij}] - [1,1]|, & \text{当 } j \in J^{\text{interval}} \text{ 时} \\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |[\bar{r}_{ij}] - [\bar{v}_{*}]|, & \text{当 } j \in J^{\text{fixed}} \text{ 时} \end{cases}$$

则基于二元区间数的正理想方案指标矩阵为

$$R^{+}=\begin{bmatrix} A^{+} & G_1 & [\bar{r}_1^{(+)}] \\ & G_2 & [\bar{r}_2^{(+)}] \\ & \vdots & \vdots \\ & G_m & [\bar{r}_m^{(+)}] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{matrix} \tag{4-3}$$

其中，$[\bar{r}_{ij}^{(+)}]=[r_{ij}^{-(+)},r_{ij}^{+(+)}]$。

基于二元区间数的负理想方案指标矩阵为

$$R^{-}=\begin{bmatrix} A^{-} & G_1 & [\bar{r}_1^{(-)}] \\ & G_2 & [\bar{r}_2^{(-)}] \\ & \vdots & \vdots \\ & G_m & [\bar{r}_m^{(-)}] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{matrix} \tag{4-4}$$

其中，$[\bar{r}_{ij}^{(-)}]=[r_{ij}^{-(-)},r_{ij}^{+(-)}]$。

定义 4.4 正理想方案指标距离矩阵是基于二元区间数对方案 A_i 标准指标矩阵 R_i 到正理想方案指标矩阵 R^{+} 的距离矩阵。即

$$D_i^{+}=\begin{bmatrix} A^{+}-A_i & G_1 & [\bar{r}_1^{(+)}]-[\bar{r}_{i1}] \\ & G_2 & [\bar{r}_2^{(+)}]-[\bar{r}_{i2}] \\ & \vdots & \vdots \\ & G_m & [\bar{r}_m^{(+)}]-[\bar{r}_{im}] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{matrix},\quad i=1,2,3,\cdots,n \tag{4-5}$$

负理想方案指标距离矩阵是基于二元区间数对方案 A_i 标准指标矩阵 R_i 到负理想方案指标矩阵 R^{-} 的距离矩阵。即

$$D_i^{-}=\begin{bmatrix} A^{-}-A_i & G_1 & [\bar{r}_1^{(-)}]-[\bar{r}_{i1}] \\ & G_2 & [\bar{r}_2^{(-)}]-[\bar{r}_{i2}] \\ & \vdots & \vdots \\ & G_m & [\bar{r}_m^{(-)}]-[\bar{r}_{im}] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{matrix},\quad i=1,2,3,\cdots,n \tag{4-6}$$

定义 4.5 正理想方案指标距离是基于二元区间数对方案 A_i 标准指标矩阵 R_i 与正理想方案 R^{+} 的指标矩阵欧氏空间距离平方和，即

$$d(A^{+},A_i)=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}w_j^2([\bar{r}_j^{(+)}]-[\bar{r}_{ij}])^2},\quad i=1,2,3,\cdots,n \tag{4-7}$$

负理想方案指标距离是基于二元区间数对方案 A_i 标准指标矩阵 R_i 与负理想方案 R^{-} 的指标矩阵欧氏空间距离平方和，即

$$d(A^{-},A_i)=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}w_j^2([\bar{r}_j^{(-)}]-[\bar{r}_{ij}])^2},\quad i=1,2,3,\cdots,n \tag{4-8}$$

4.2 模型的构建及求解

当决策方案 A_i 的正理想方案指标区间距离 $d(A^+, A_i)$ 越大、负理想方案指标区间距离 $d(A^-, A_i)$ 越小时，表示决策方案 A_i 越优，越符合决策者的需求。所以建立如下决策模型：

模型 1 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\bar{d}_i(w)\right]=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d(A^+,A_i)-d(A^-,A_i)\}$ (4-9)

为了便于计算求解，把模型 1 变成等价模型 2：

模型 2 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\bar{D}_i(w)\right]=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{[d(A^+,A_i)]^2-[d(A^-,A_i)]^2\}$ (4-10)

则 $\left[\bar{D}_i(w)\right]$ 越小，方案 A_i 越容易满足决策者的需要，方案 A_i 就越优。

当决策者不能提供任何权重信息时，权重系数是未知的。目前，确定权重的方法有两类：主观赋权法和客观赋权法。主观赋权法反映了决策者的主观判断或直觉，但会产生一定的主观随意性。而客观赋权法通常利用比较完善的数学理论与方法，但忽视了决策者的主观信息。本章为了充分反映原来的信息，消除指标间的相关关系带来的重复信息，加强结果的客观性，采用拉格朗日函数来确定指标的权重系数值。

由于每个方案均为非劣方案，不存在任何偏好关系，于是决策模型 2 变为单目标决策模型 3：

模型 3 $\min\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[[d(A^+,A_i)]^2-[d(A^-,A_i)]^2\right]\right\}$ (4-11)

$$\text{s.t.}: w_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{m}w_i=1$$

因式(4-11)为非线性的极值问题，所以根据 Ku-Tucker 充要条件作 lagrange 函数求权重。令

$$L(w,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\{[d(A^+,A_i)]^2-[d(A^-,A_i)]^2\}+2\lambda\left(\sum_{j=1}^{m}w_j-1\right) \quad (4\text{-}12)$$

依据式(4-7)、式(4-8)，对式(4-12)关于 w_j 和 λ 求导并令它们为 0，就有

$$\frac{\partial L}{\partial w_j}=2w_j\sum_{i=1}^{n}\{([\bar{r}_j^{(+)}]-[\bar{r}_{ij}])^2-([\bar{r}_j^{(-)}]-[\bar{r}_{ij}])^2\}+2\lambda=0$$

$$j=1,2,\cdots,m \quad (4\text{-}13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\sum_{j=1}^{m}w_j-1=0 \quad (4\text{-}14)$$

将式(4-13)、式(4-14)表示的 $m+1$ 个变量、$m+1$ 个方程的方程组用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} Q_{m\times m} & E_{m\times 1} \\ E_{1\times m}^{T} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{m\times 1} \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O_{m\times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4-15}$$

其中

$$W_{m\times 1} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{T}$$
$$E_{m\times 1} = (1,1,\cdots,1)^{T}$$
$$C_{m\times 1} = (0,0,\cdots,0)^{T}$$
$$Q_{m\times m} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_m \end{bmatrix}$$

$$k_j = \sum_{i=1}^{n}[(r_j^{+} - r_{ij})^2 - (r_j^{-} - r_{ij})^2], \quad j = 1,2,\cdots,m$$

由矩阵方程式(4-15)解得

$$W_{m\times 1} = Q_{m\times m}^{-1} \cdot E_{m\times 1} \tag{4-16}$$

即

$$[\overline{w}_j] = \frac{1}{k_j \sum_{t=1}^{m}\left\{1/\sum_{i=1}^{n}[([\overline{r}_t^{(+)}]-[\overline{r}_{it}])^2-([\overline{r}_t^{(-)}]-[\overline{r}_{it}])^2]\right\}} \tag{4-17}$$

其中，$j = 1,2,\cdots,m$。

将 $W_{m\times 1} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{T}$ 代入式(4-10)得决策方案 A_i 的决策值为 $[\overline{D}_i]$。则

$$f_i = \min\{[D_i(w)] \mid i = 1,2,\cdots,n\} \tag{4-18}$$

表示第 i 个决策方案 A_i 为最佳方案。

4.3 模型应用分析

2005 年某市根据现有的公交线路网络，在考虑城市发展的基础上，某交通研究所提出 5 种城市公交线网的优化调整方案，然后要求交通部门在这 5 种方案中选出一种最佳的优化方案。其中考察的指标有：公交企业经济效益 G_1、线网覆盖率 G_2、线路重复系数 G_3、乘客直达率 G_4、乘客总出行时间 G_5、线路网络日均满载率 G_6。设 5 种优化方案为：方案 1、方案 2、方案 3、方案 4、方案 5。则 5 个方案的决策矩阵见表 4-2。

表 4-2　指标考察值

方案	G_1 /万元	G_2 /%	G_3 /%	G_4 /%	G_5 /min	G_6 /%
方案 1	[1762.3,1886.1]	[51.3,59.5]	[24.7,25.5]	[57.8,60.5]	[31,35]	[55,60]
方案 2	[998.3,1007.5]	[71.3,75.5]	[18.1,18.5]	[53.2,55.5]	[17,20]	[35,40]
方案 3	[1235.3,1356.8]	[42.2,50.2]	[14.3,15.5]	[43.3,45.5]	[27,30]	[85,90]
方案 4	[498.3,566.6]	[61.7,65.8]	[21.3,22.5]	[48.7,50.6]	[23,25]	[45,50]
方案 5	[871.6,998.5]	[78.3,80.5]	[16.7,17.3]	[38.3,40.5]	[22,25]	[75,80]

于是依据上面定义，计算步骤如下：

步骤 1　确定方案的指标矩阵为

$$Y_1=\begin{bmatrix} A_1 & G_1 & [1762.3,1886.1] \\ & G_2 & [51.3,59.5] \\ & G_3 & [24.7,25.5] \\ & G_4 & [57.8,60.5] \\ & G_5 & [31,35] \\ & G_6 & [55,60] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad Y_2=\begin{bmatrix} A_2 & G_1 & [999.8,1007.5] \\ & G_2 & [71.3,75.5] \\ & G_3 & [18.1,18.5] \\ & G_4 & [53.2,55.5] \\ & G_5 & [17,20] \\ & G_6 & [35,40] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

$$Y_3=\begin{bmatrix} A_3 & G_1 & [1235.3,1356.8] \\ & G_2 & [42.2,50.2] \\ & G_3 & [14.3,15.5] \\ & G_4 & [43.3,45.5] \\ & G_5 & [27,30] \\ & G_6 & [85,90] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad Y_4=\begin{bmatrix} A_4 & G_1 & [498.3,566.6] \\ & G_2 & [61.7,65.8] \\ & G_3 & [21.3,22.5] \\ & G_4 & [48.7,50.6] \\ & G_5 & [23,25] \\ & G_6 & [45,50] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

$$Y_5=\begin{bmatrix} A_5 & G_1 & [871.6,998.5] \\ & G_2 & [78.3,80.5] \\ & G_3 & 16.7,17.3] \\ & G_4 & [38.3,40.5] \\ & G_5 & [22,25] \\ & G_6 & [75,80] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

步骤 2　确定方案标准指标矩阵为

$$R_1=\begin{bmatrix} A_1 & G_1 & [0,0] \\ & G_2 & [0.301,0.307] \\ & G_3 & [0,0] \\ & G_4 & [1,1] \\ & G_5 & [0.217,0.250] \\ & G_6 & [1,1] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad R_2=\begin{bmatrix} A_2 & G_1 & [1,1] \\ & G_2 & [0.811,0.835] \\ & G_3 & [0.623,0.7] \\ & G_4 & [0.651,0.75] \\ & G_5 & [0.5,0.5] \\ & G_6 & [0.312,0.334] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

$$R_3=\begin{bmatrix} A_3 & G_1 & [0.301,0.333] \\ & G_2 & [0,0] \\ & G_3 & [1,1] \\ & G_4 & [0.177,0.25] \\ & G_5 & [1,1] \\ & G_6 & [0.533,0.599] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad R_4=\begin{bmatrix} A_4 & G_1 & [0.623,0.667] \\ & G_2 & [0.492,0.505] \\ & G_3 & [0.3,0.3] \\ & G_4 & [0.478,0.5] \\ & G_5 & [0,0] \\ & G_6 & [0,0] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

$$R_5=\begin{bmatrix} A_5 & G_1 & [0.617,0.667] \\ & G_2 & [1,1] \\ & G_3 & [0.798,0.82] \\ & G_4 & [0,0] \\ & G_5 & [0.713,0.75] \\ & G_6 & [0.298,0.327] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

步骤 3　确定正理想方案指标矩阵和负理想方案指标矩阵为

$$R^+=\begin{bmatrix} A^+ & G_1 & [1,1] \\ & G_2 & [1,1] \\ & G_3 & [1,1] \\ & G_4 & [1,1] \\ & G_5 & [1,1] \\ & G_6 & [1,1] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad R^-=\begin{bmatrix} A^- & G_1 & [0,0] \\ & G_2 & [0,0] \\ & G_3 & [0,0] \\ & G_4 & [0,0] \\ & G_5 & [0,0] \\ & G_6 & [0,0] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

步骤 4　确定正理想方案指标距离矩阵和负理想方案指标距离矩阵。

(1) 正理想方案指标距离矩阵为

$$D_1^+=\begin{bmatrix} A^+-A_1 & G_1 & [1,1] \\ & G_2 & [0.693,0.699] \\ & G_3 & [1,1] \\ & G_4 & [0,0] \\ & G_5 & [0.75,0.823] \\ & G_6 & [0,0] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad D_2^+=\begin{bmatrix} A^+-A_2 & G_1 & [0,0] \\ & G_2 & [0.165,0.189] \\ & G_3 & [0.3,0.377] \\ & G_4 & [0.25,0.349] \\ & G_5 & [0.5,0.5] \\ & G_6 & [0.666,0.688] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

$$D_3^+=\begin{bmatrix} A^+-A_3 & G_1 & [0.667,0.699] \\ & G_2 & [1,1] \\ & G_3 & [0,0] \\ & G_4 & [0.75,0.823] \\ & G_5 & [0,0] \\ & G_6 & [0.401,0.467] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad D_4^+=\begin{bmatrix} A^+-A_4 & G_1 & [0.333,0.3777] \\ & G_2 & [0.495,0.508] \\ & G_3 & [0.7,0.7] \\ & G_4 & [0.495,0.522] \\ & G_5 & [1,1] \\ & G_6 & [1,1] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

$$D_5^+=\begin{bmatrix} A^+-A_5 & G_1 & [0.333,0.383] \\ & G_2 & [0,0] \\ & G_3 & [0.18,0.202] \\ & G_4 & [1,1] \\ & G_5 & [0.25,0.287] \\ & G_6 & [0.673,0.702] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

(2) 负理想方案指标距离矩阵为

$$D_1^-=\begin{bmatrix} A_1-A^- & G_1 & [0,0] \\ & G_2 & [0.301,0.307] \\ & G_3 & [0,0] \\ & G_4 & [1,1] \\ & G_5 & [0.217,0.250] \\ & G_6 & [1,1] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad D_2^-=\begin{bmatrix} A_2-A^- & G_1 & [1,1] \\ & G_2 & [0.811,0.835] \\ & G_3 & [0.623,0.7] \\ & G_4 & [0.651,0.75] \\ & G_5 & [0.5,0.5] \\ & G_6 & [0.312,0.334] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

$$D_3^-=\begin{bmatrix} A_3-A^- & G_1 & [0.301,0.333] \\ & G_2 & [0,0] \\ & G_3 & [1,1] \\ & G_4 & [0.177,0.25] \\ & G_5 & [1,1] \\ & G_6 & [0.533,0.599] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix},\quad D_4^-=\begin{bmatrix} A_4-A^- & G_1 & [0.623,0.667] \\ & G_2 & [0.492,0.505] \\ & G_3 & [0.3,0.3] \\ & G_4 & [0.478,0.5] \\ & G_5 & [0,0] \\ & G_6 & [0,0] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

$$D_5^-=\begin{bmatrix} A_5-A^- & G_1 & [0.617,0.667] \\ & G_2 & [1,1] \\ & G_3 & [0.798,0.82] \\ & G_4 & [0,0] \\ & G_5 & [0.713,0.75] \\ & G_6 & [0.298,0.327] \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix}$$

步骤 5　确定权重向量。

由式(4-17)得各指标权重向量为

$$[\vec{W}]=([0.199,0.219],[0.110,0.132],[0.125,0.149],[0.164,0.182],$$
$$[0.203,0.227],[0.133,0.157])$$

步骤 6　计算决策值。

由式(4-10)得 5 种方案的决策值分别为

$$[\bar{D}_1]=[0.399,0.419],\quad [\bar{D}_2]=[0.683,0.701],\quad [\bar{D}_3]=[0.477,0.501]$$

$$[\bar{D}_4]=[0.315,0.339],\quad [\bar{D}_5]=[0.570,0.592]$$

依据二元区间数的排序准则，则

$$[\bar{D}_2]>[\bar{D}_5]>[\bar{D}_3]>[\bar{D}_1]>[\bar{D}_4]$$

即决策方案的排序关系为

方案 4≻方案 1≻方案 3≻方案 5≻方案 2

即方案 4 为最佳方案。

所以，本章利用物元分析矩阵和理想点法相结合的原则，对多指标决策问题进行了综合研究，依据区间数理论中的二元区间数建立了基于物元矩阵的优化决策模型。该模型具有过程简单、使用方便等特点。特别在权重取值上采用拉格朗日函数来确定指标权重值，克服了决策中人为因素影响大的缺点，解决了不相容指标权重值分配难的问题，为多指标决策问题提供了一条新的途径。

第 5 章　基于熵区间的时序关联决策模型

针对时序多指标决策问题，利用区间数理论中的二元区间数进行研究。首先，依据二元区间数的基本运算关系，在定义相关概念的基础上，用熵区间数和五级权重区间法分别来确定时序多指标决策问题指标权重和时段权重区间值。其次，在定义正负区间理想方案的基础上，给出了关联区间的计算过程。最后，在计算各方案与正负方案的关联度区间的情况下，构造基于二元区间数的时序关联决策模型，并依据二元区间数的排序准则，利用优属度区间对各决策方案进行优选排序。实例分析表明该法为时序多指标决策问题提供了又一科学、合理的新方法。

5.1　时序关联区间决策原理

动态多指标决策问题的基本特征是在决策空间和目标空间基础上，又增加了时间空间，是具有时间、指标、方案的三维决策排序问题[70,71]。而动态区间决策就是对属性取值、属性权重和时间权重全部为区间数的多指标决策问题进行研究。目前许多学者分别从不同角度对区间数的多指标决策问题进行了研究[72,73]。如学者卫武贵对时间权重为区间数的静态多指标决策问题进行了研究；学者楮萍对决策矩阵为区间数的动态多指标决策问题进行了研究，提出了一种建立多目标规划模型来确定属性权重向量的决策分析法。但这些研究成果都是对动态多指标决策的初步研究。本章在考虑了主观监督因子的前提下，依据“数字-信息-知识”的思维，从“决策空间-目标空间-时间空间”3 个方面，利用二元区间数将静态多指标决策方法变成动态多指标决策方法，建立基于二元区间数的时序多指标决策模型。

设时序多指标决策问题有 n 个待选方案，记 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$ 为方案集；m 个决策指标，记 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$ 为指标集。时序多指标决策问题的时间区段为 $t(t=1,2,\cdots,q)$，其相应的时段权重为区间数 $\left[\bar{E}_t\right]$。在 t 时段，m 个决策指标的权重区间向量为

$$\left[\overrightarrow{W}(t)\right]=(\left[\bar{w}_1(t)\right],\left[\bar{w}_2(t)\right],\cdots,\left[\bar{w}_m(t)\right])$$

令在 $t(t=1,2,\cdots,q)$ 时段，决策方案 A_i 对指标 G_j 的属性区间值为

$$X(t)=(\left[x_{ij}^-(t),x_{ij}^+(t)\right])_{n\times m}$$

其中，$\left[\bar{x}_{ij}(t)\right]=\left[x_{ij}^-(t),x_{ij}^+(t)\right](i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$。则在 t 时段，方案

集 A 对指标集 G 的决策区间矩阵为

$$X(t)=\begin{bmatrix}[x_{11}^-(t),x_{11}^+(t)] & [x_{12}^-(t),x_{12}^+(t)] & \cdots & [x_{1m}^-(t),x_{1m}^+(t)]\\ [x_{21}^-(t),x_{21}^+(t)] & [x_{22}^-(t),x_{22}^+(t)] & \cdots & [x_{2m}^-(t),x_{2m}^+(t)]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [x_{n1}^-(t),x_{n1}^+(t)] & [x_{n2}^-(t),x_{n2}^+(t)] & \cdots & [x_{nm}^-(t),x_{nm}^+(t)]\end{bmatrix} \tag{5-1}$$
$$=([x_{ij}^-(t),x_{ij}^+(t)])_{n\times m}$$

5.1.1 决策矩阵的标准化处理

为了使各指标有公度性，必须对决策矩阵进行标准化处理。令

$$J^+=\{\text{效益型指标}\},\quad J^-=\{\text{成本型指标}\},\quad J^{\text{fixed}}=\{\text{固定型指标}\}$$

则

$$(1)\ [r_{ij}^-(t),r_{ij}^+(t)]=\left[\frac{x_{ij}^-(t)}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}^-(t)},\frac{x_{ij}^+(t)}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}^+(t)}\right],\quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^+ \tag{5-2}$$

$$(2)\ [r_{ij}^-(t),r_{ij}^+(t)]=\left[\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}^-(t)}{x_{ij}^-(t)},\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}^+(t)}{x_{ij}^+(t)}\right],\quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^- \tag{5-3}$$

$$(3)\ [r_{ij}^-(t),r_{ij}^+(t)]=\left[1-\frac{|x_{ij}^-(t)-x_j^*(t)|}{|\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}x_{ij}^-(t)-x_j^*(t)|},1-\frac{|x_{ij}^+(t)-x_j^*(t)|}{|\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}x_{ij}^+(t)-x_j^*(t)|}\right]$$
$$i=1,2,\cdots,n;j\in J^{\text{fixed}} \tag{5-4}$$

其中，$x_j^*(t)$ 为 t 时段指标 G_j 的固定值。

t 时段，标准化处理后的决策区间矩阵为

$$R(t)=\begin{bmatrix}[r_{11}^-(t),r_{11}^+(t)] & [r_{12}^-(t),r_{12}^+(t)] & \cdots & [r_{1m}^-(t),r_{1m}^+(t)]\\ [r_{21}^-(t),r_{21}^+(t)] & [r_{22}^-(t),r_{22}^+(t)] & \cdots & [r_{2m}^-(t),r_{2m}^+(t)]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [r_{n1}^-(t),r_{n1}^+(t)] & [r_{n2}^-(t),r_{n2}^+(t)] & \cdots & [r_{nm}^-(t),r_{nm}^+(t)]\end{bmatrix} \tag{5-5}$$
$$=([r_{ij}^-(t),r_{ij}^+(t)])_{n\times m}$$

5.1.2 各时段各决策指标权重值的确定

定义 5.1 在 t 时段，对于指标 G_j，定义决策方案 A_i 与其他所有方案的偏差区间

$$[\bar{D}_{ij}(t)]=[d_{ij}^-(t),d_{ij}^+(t)]=\sum_{k=1}^{n}d([r_{ij}^-(t),r_{ij}^+(t)],[r_{kj}^-(t),r_{kj}^+(t)]) \tag{5-6}$$

定义 5.2 在 t 时段，在指标 G_j 下，定义方案的总偏差区间为指标 G_j 下方案

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的偏差之和，即

$$[\bar{D}_j(t)] = [d_j^-(t), d_j^+(t)] = \sum_{i=1}^{n} [d_{ij}^-(t), d_{ij}^+(t)] \tag{5-7}$$

定义 5.3　在 t 时段，指标 G_j 的输出信息熵区间为

$$[\bar{H}_j(t)] = [h_j^-(t), h_j^+(t)] = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} \frac{[\bar{D}_{ij}(t)]}{[\bar{D}_j(t)]} \ln \frac{[\bar{D}_{ij}(t)]}{[\bar{D}_j(t)]} \tag{5-8}$$

定义 5.4　在 t 时段，指标 G_j 的偏度区间为

$$[\bar{F}_j(t)] = [f_j^-(t), f_j^+(t)] = [1 - h_j^+(t), 1 - h_j^-(t)] \tag{5-9}$$

定义 5.5　在 t 时段，指标 G_j 的权重值区间为

$$[\bar{W}_j(t)] = [w_j^-(t), w_j^+(t)] = \frac{[f_j^-(t), f_j^+(t)]}{\sum_{j=1}^{m} [f_j^-(t), f_j^+(t)]} \tag{5-10}$$

5.1.3　时序条件下正负理想方案的确定

定义 5.6　基于二元区间数的正理想方案为

$$U_0^+ = \{[b_1^-, b_1^+], [b_2, b_2^+], \cdots, [b_m^-, b_m^+]\}$$

其中，$[b_i^-, b_i^+] = \max\limits_t \max\limits_i ([r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)])$。

基于二元区间数的负理想方案为

$$U_0^- = \{[s_1^-, s_1^+], [s_2^-, s_2^+], \cdots, [s_m^-, s_m^+]\}$$

其中，$[s_i^-, s_i^+] = \min\limits_t \min\limits_i ([r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)])$。

5.1.4　各时段的关联度区间的确定

由灰色关联度理论可知，在 t 时段，决策方案 A_i 与正理想方案 U_0^+ 关于指标 G_j 的关联度系数区间为

$$[\zeta_{ij}(t)] = [\zeta_{ij}^-(t), \zeta_{ij}^+(t)]$$
$$= \frac{\min\limits_i \min\limits_j |[r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)] - [b_j^-, b_j^+]| + 0.5 \max\limits_i \max\limits_j |[r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)] - [b_j^-, b_j^+]|}{|[r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)] - [b_j^-, b_j^+]| + 0.5 \max\limits_i \max\limits_j |[r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)] - [b_j^-, b_j^+]|} \tag{5-11}$$

在 t 时段，决策方案 A_i 与负理想方案 U_0^- 关于指标 G_j 的关联度系数区间为

$$[\eta_{ij}(t)] = [\eta_{ij}^-(t), \eta_{ij}^+(t)]$$
$$= \frac{\min\limits_i \min\limits_j |[r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)] - [s_j^-, s_j^+]| + 0.5 \max\limits_i \max\limits_j |[r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)] - [s_j^-, s_j^+]|}{|[r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)] - [s_j^-, s_j^+]| + 0.5 \max\limits_i \max\limits_j |[r_{ij}^-(t), r_{ij}^+(t)] - [s_j^-, s_j^+]|} \tag{5-12}$$

在 t 时段，综合所有指标，决策方案 A_i 与正理想方案 U_O^+ 的正关联度区间为

$$[\bar{\gamma}_i(t)] = [\gamma_i^-(t),\gamma_i^+(t)] = \sum_{j=1}^{m}([\bar{W}_j(t)]\cdot[\bar{\zeta}_{ij}(t)]) \tag{5-13}$$

在 t 时段，综合所有指标，决策方案 A_i 与负理想方案 U_O^- 的负关联度区间为

$$[\bar{\mu}_i(t)] = [\mu_i^-(t),\mu_i^+(t)] = \sum_{j=1}^{m}([\bar{W}_j(t)]\cdot[\bar{\eta}_{ij}(t)]) \tag{5-14}$$

5.1.5 时段权重区间的确定

由于各时段在动态决策中所起的作用不同，所以根据各时段对动态决策问题中所起作用的重要程度，把时段 t 对决策问题的重要性划分为 5 个级别，见表5-1。

表 5-1 属性级别

等级	一级	二级	三级	四级	五级
属性	特别重要	极重要	较重要	重要	一般
取值范围	[0.9,1.0)	[0.8,0.9)	[0.7,0.8)	[0.6,0.7)	[0.5,0.6)

由于动态决策问题中的时段 t，在不同情况下所起的作用不同，所以它在不同的情况下属于不同的属性级别。因此在具体的动态决策问题中，结合实际情况就可以得到时段的属性级别，然后根据属性级别的取值范围就可得到时段 $t(t=1,2,\cdots,q)$ 的初始权重区间 $[\bar{c}_t]=[c_t^-,c_t^+]$。

利用模糊数学中的模糊语言，将 $[\bar{c}_t]=[c_t^-,c_t^+]$ 模糊处理。令

$$e_t^- = (c_t^- - a)/(b-a),\quad e_t^+ = (c_t^+ - a)/(b-a)$$

其中，a、b 为修正系数，一般情况下 $a=0.5$，$b=1.0$。则基于二元区间数的各时段的权重区间系数为

$$[\bar{e}_t] = [e_t^-,e_t^+],\quad t=1,2,\cdots,q \tag{5-15}$$

5.1.6 时序优选决策模型

综合所有时段，决策方案 A_i 以二元区间数 $[\bar{u}_i]=[u_i^-,u_i^+]$ 从属于正理想方案，以二元区间数的补集 $[\bar{u}_i]=[1-u_i^+,1-u_i^-]$ 从属于负理想方案。将最小二乘法在此推广，使得决策方案的排序向量 $[\overrightarrow{U}]=\{[u_1^-,u_1^+],[u_2^-,u_2^+],\cdots,[u_n^-,u_n^+]\}$ 距离正理想方案 U_O^+ 较近，距离负理想方案 U_O^- 较远。由此建立模糊环境下的优化模型为

$$\begin{aligned}
&\min F\{[u_1^-,u_1^+],[u_2^-,u_2^+],\cdots,[u_n^-,u_n^+]\}\\
&=\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{q}\{[[\bar{\mu}_i]\cdot[\bar{e}_t]\cdot[\bar{\gamma}_i(t)]]^2+[[\bar{u}_i]\cdot[\bar{e}_t]\cdot[\bar{\mu}_i(t)]]^2\}\\
&=\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{q}\{[[1-u_i^+,1-u_i^-]\cdot[e_t^-,e_t^+]\cdot[\gamma_i^-(t),\gamma_i^+(t)]]^2\\
&+[[u_i^-,u_i^+]\cdot[e_t^-,e_t^+]\cdot[\mu_i^-(t),\mu_i^+(t)]]^2\}
\end{aligned}\tag{5-16}$$

式(5-16)为无约束极值问题。所以，为了对式(5-16)求解，应该先求导并令导数为零，即

$$\partial F\{[u_1^-,u_1^+],[u_2^-,u_2^+],\cdots,[u_n^-,u_n^+]\}/\partial[u_i^-,u_i^+]=0$$

则

$$[u_i^-,u_i^+]=\frac{\sum_{t=1}^{q}\{[e_t^-,e_t^+]\cdot[\gamma_i^-(t),\gamma_i^+(t)]\}^2}{\sum_{t=1}^{q}\{[e_t^-,e_t^+]\cdot[\eta_i^-(t),\eta_i^+(t)]\}^2+\sum_{t=1}^{q}\{[e_t^-,e_t^+]\cdot[\gamma_i^-(t),\gamma_i^+(t)]\}^2}$$

$$i=1,2,\cdots,n\tag{5-17}$$

5.1.7　最佳决策方案的确定

根据最大优属度原则，最佳决策方案 A_i 对应的最大优属度区间为

$$\max\{[\bar{u}_i]\mid i=1,2,\cdots,n\}\tag{5-18}$$

并依据二元区间数的排序关系和优属度区间 $[\bar{u}_i]=[u_i^-,u_i^+]$ 的值，对所有决策方案进行优劣排序。如果优属度区间在排序时，无法按照二元区间数的一般关系进行排序，就用二元区间数的期望值进行排序比较研究。最后排在最前面的决策方案 A_i 就为最佳方案。

5.2　应用分析

依据“十一五”规划，许多城市在考虑城市发展的基础上，考虑城市公共交通优先发展，通过政府招标的形式对现有的城市公共交通网络系统进行改造扩建。招商银行打算参与 4 个城市 B_1、B_2、B_3、B_4 的公共交通网络系统的改造工程，在投资前进行决策分析。招商银行选取了 6 个主要指标进行决策，分别是公交企业经济效益 G_1、线网覆盖率 G_2、线路重复系数 G_3、乘客直达率 G_4、乘客总出行时间 G_5、线路网络日均满载率 G_6。招商银行对 4 个城市 B_1、B_2、B_3、B_4 的公共交通网络系统进行了综合考察，具体考察值见表 5-2。

表 5-2　指标考察值

城市	时序	G_1 /万元	G_2 /%	G_3 /%	G_4 /%	G_5 /min	G_6 /%
B_1	02 年	[1886.1,1890.2]	[58.5,59.5]	[25.5,28.5]	[60.5,62.3]	[35.2,37.3]	[60.7,61.2]
	03 年	[2001.7,2017.8]	[60.1,60.8]	[23.5,26.1]	[61.7,62.6]	[33.3,36.1]	[61.3,62.5]
	04 年	[2018.3,2030.5]	[61.3,62.1]	[22.8,24.7]	[62.3,63.7]	[32.7,35.2]	[62.2,63.7]
B_2	02 年	[1007.5,1012.3]	[52.5,55.5]	[18.5,19.7]	[57.2,58.3]	[20.1,22.3]	[40.6,42.1]
	03 年	[1178.1,1182.3]	[53.7,56.3]	[17.8,18.3]	[57.6,58.9]	[21.8,23.8]	[46.7,48.6]
	04 年	[1391.3,1399.7]	[55.6,57.1]	[16.3,17.3]	[59.7,60.1]	[24.7,25.8]	[48.6,49.8]
B_3	02 年	[1351.8,1362.7]	[50.2,51.8]	[15.5,16.7]	[45.5,47.2]	[30.1,32.3]	[80.1,82.3]
	03 年	[1535.2,1541.2]	[51.3,52.6]	[15.3,16.3]	[46.8,47.7]	[29.3,31.3]	[83.3,85.2]
	04 年	[1667.1,1671.8]	[52.3,53.8]	[14.9,15.8]	[48.7,49.3]	[28.7,30.8]	[81.1,82.7]
B_4	02 年	[1672.8,1681.3]	[60.3,62.5]	[17.2,18.5]	[56.1,58.2]	[36.1,38.2]	[73.2,75.3]
	03 年	[1783.5,1784.1]	[58.6,59.8]	[16.8,17.7]	[57.3,59.2]	[37.5,39.1]	[75.1,77.3]
	04 年	[1938.6,1943.7]	[57.7,60.1]	[15.2,17.1]	[58.3,60.1]	[35.3,36.8]	[76.7,78.1]

利用时序区间优选模型计算步骤如下：

步骤 1　建立基于二元区间数的决策区间矩阵。

根据表 5-2 中的数据建立决策区间矩阵为

$$Y(02)=\begin{bmatrix} [1886.1,1890.2] & [58.5,59.5] & [25.5,28.5] & [60.5,62.3] & [35.2,37.3] & [60.7,61.2] \\ [1007.5,1012.3] & [52.5,55.5] & [18.5,19.7] & [57.2,58.3] & [20.1,22.3] & [40.6,42.1] \\ [1351.8,1362.7] & [50.2,51.8] & [15.5,16.7] & [45.5,47.2] & [30.1,32.3] & [80.1,82.3] \\ [1672.8,1681.3] & [60.3,62.5] & [17.2,18.5] & [56.1,58.2] & [36.1,38.2] & [73.2,75.3] \end{bmatrix}$$

$$Y(03)=\begin{bmatrix} [2001.7,2017.8] & [60.1,60.8] & [23.5,26.1] & [61.7,62.6] & [33.3,36.1] & [61.3,62.5] \\ [1178.1,1182.3] & [53.7,56.3] & [17.8,18.3] & [57.6,58.9] & [21.8,23.8] & [46.7,48.6] \\ [1535.2,1541.2] & [51.3,52.6] & [15.3,16.3] & [46.8,47.7] & [29.3,31.3] & [83.3,85.2] \\ [1783.5,1784.1] & [58.6,59.8] & [16.8,17.7] & [57.3,59.2] & [37.5,39.1] & [75.1,77.3] \end{bmatrix}$$

$$Y(04)=\begin{bmatrix} [2028.3,2030.5] & [61.3,62.1] & [22.8,24.7] & [62.3,63.7] & [32.7,35.2] & [62.2,63.7] \\ [1391.3,1399.7] & [55.6,57.1] & [16.3,17.3] & [59.7,60.1] & [24.7,25.8] & [48.6,49.8] \\ [1667.1,1671.8] & [52.3,53.8] & [14.9,15.8] & [48.7,49.3] & [28.7,30.8] & [81.1,82.7] \\ [1938.6,1943.7] & [57.7,60.1] & [15.2,17.1] & [58.3,60.1] & [35.3,36.8] & [76.7,78.1] \end{bmatrix}$$

步骤 2　决策矩阵的标准化处理。

依据式(5-2)～式(5-4)对决策区间矩阵进行标准化处理得

$$R(02)=\begin{bmatrix} [0.134,0.135] & [0.145,0.167] & [0.123,0.151] & [0.142,0.153] & [0.172,0.179] & [0.168,0.172] \\ [0.128,0.129] & [0.132,0.139] & [0.117,0.122] & [0.136,0.139] & [0.153,0.157] & [0.152,0.158] \\ [0.131,0.137] & [0.137,0.141] & [0.108,0.111] & [0.112,0.119] & [0.162,0.171] & [0.178,0.179] \\ [0.149,0.152] & [0.152,0.159] & [0.121,0.127] & [0.132,0.138] & [0.181,0.189] & [0.163,0.167] \end{bmatrix}$$

$$R(03)=\begin{bmatrix}[0.172,0.179] & [0.181,0.187] & [0.173,0.181] & [0.181,0.188] & [0.171,0.178] & [0.161,0.167]\\ [0.111,0.119] & [0.152,0.159] & [0.157,0.162] & [0.172,0.179] & [0.143,0.147] & [0.122,0.128]\\ [0.147,0.151] & [0.132,0.139] & [0.131,0.139] & [0.132,0.140] & [0.152,0.161] & [0.182,0.189]\\ [0.159,0.162] & [0.172,0.178] & [0.131,0.137] & [0.172,0.178] & [0.161,0.169] & [0.173,0.179]\end{bmatrix}$$

$$R(04)=\begin{bmatrix}[0.182,0.187] & [0.182,0.187] & [0.178,0.182] & [0.182,0.189] & [0.152,0.157] & [0.162,0.172]\\ [0.121,0.129] & [0.131,0.138] & [0.152,0.159] & [0.171,0.179] & [0.113,0.117] & [0.122,0.128]\\ [0.151,0.157] & [0.127,0.131] & [0.111,0.119] & [0.122,0.129] & [0.123,0.131] & [0.181,0.189]\\ [0.172,0.181] & [0.138,0.142] & [0.121,0.128] & [0.171,0.178] & [0.167,0.171] & [0.173,0.177]\end{bmatrix}$$

步骤 3　确定 t 时段决策指标权重。

依据式(5-7)～式(5-10)，则

(1) 02 年，决策指标权重向量为

$$W(02)=([0.173,0.181],[0.158,0.167],[0.147,0.156],[0.163,0.171],[0.158,0.163],[0.157,0.162])$$

(2) 03 年，决策指标权重向量为

$$W(03)=([0.168,0.173],[0.151,0.159],[0.159,0.168],[0.167,0.175],[0.153,0.161],[0.155,0.164])$$

(3) 04 年，决策指标权重向量为

$$W(04)=([0.161,0.169],[0.165,0.173],[0.151,0.159],[0.161,0.167],[0.162,0.169],[0.157,0.163])$$

步骤 4　确定正负理想方案。

依据定义 5.6，则正理想方案为

$$U_0^+=\{[0.181,0.187],[0.182,0.190],[0.178,0.182],[0.183,0.189],[0.180,0.189],[0.182,0.189]\}$$

依据定义 5.6，则负理想方案为

$$U_0^-=\{[0.111,0.118],[0.127,0.131],[0.108,0.111],[0.112,0.119],[0.113,0.117],[0.123,0.128]\}$$

步骤 5　确定 t 时段的关联度区间。

依据式(5-13)、式(5-14)，则

(1) 02 年，4 个城市 B_1、城市 B_2、城市 B_3、城市 B_4 的正关联度区间为

$$\gamma(02)=([0.163,0.169],[0.182,0.188],[0.131,0.137],[0.152,0.159])$$

4 个城市 B_1、城市 B_2、城市 B_3、城市 B_4 的负关联度区间为

$$\mu(02)=([0.142,0.148],[0.162,0.169],[0.111,0.118],[0.132,0.139])$$

(2) 03 年，4 个城市 B_1、城市 B_2、城市 B_3、城市 B_4 的正关联度区间为

$$\gamma(03)=([0.173,0.180],[0.190,0.198],[0.141,0.147],[0.161,0.169])$$

4 个城市 B_1、城市 B_2、城市 B_3、城市 B_4 的负关联度区间为

$$\mu(03)=([0.151,0.157],[0.171,0.179],[0.123,0.128],[0.141,0.148])$$

(3) 04 年,4 个城市 B_1、城市 B_2、城市 B_3、城市 B_4 的正关联度区间为

$\gamma(04) = ([0.180,0.187],[0.191,0.199],[0.151,0.157],[0.172,0.179])$

4 个城市 B_1、城市 B_2、城市 B_3、城市 B_4 的负关联度区间为

$\mu(04) = ([0.155,0.161],[0.180,0.186],[0.131,0.138],[0.151,0.159])$

步骤 6　确定基于二元区间数的时段权重。

由式(5-15)可知 02 年、03 年、04 年的权重区间向量为

$$[\vec{E}] = ([0.311,0.318],[0.329,0.337],[0.311,0.347])$$

步骤 7　确定排序优属度区间

依据式(5-17)知:

(1) 城市 B_1 的优属度 $[\bar{u}_1] = [0.712,0.773]$。

(2) 城市 B_2 的优属度 $[\bar{u}_2] = [0.731,0.742]$。

(3) 城市 B_3 的优属度 $[\bar{u}_3] = [0.641,0.713]$。

(4) 城市 B_4 的优属度 $[\bar{u}_4] = [0.695,0.738]$。

由二元区间数的排序原则可知,这 4 个城市的排序关系为

$$B_1 \succ B_2 \succ B_4 \succ B_3$$

所以城市 B_1 为最佳投资对象。

总之,本章针对动态多指标决策问题,在考虑了信息的透明度原则的基础上,利用二元区间数理论,提出了基于信息熵和五级权重区间的动态优选模型。在用信息熵确定决策指标权重和用五级权重法确定时段权重的基础上,提出了一种基于二元区间数的关联分析法。该法不但丰富了灰色关联度理论,而且为解决动态多指标决策问题提供了新的途径。

第6章　基于权重未知的二元区间决策模型

基于二元区间数理论，利用极值原理和非线性规划知识，对权重区间未知的多指标决策问题进行研究。在定义理想指标的基础上，通过比较决策方案各个指标与理想方案各个指标的距离区间大小，来建立多指标决策问题的数学模型。并在利用数学中的拉格朗日函数确定各指标权重区间值的基础上，依据二元区间数的高级运算关系，对决策模型进行求解。实际应用结果表明该法科学合理、计算简单。

6.1　问题描述

多指标决策现在广泛应用于项目评估、方案优化、投资决策、交通管理、决策预测和系统评价等诸多领域。在多指标决策问题中，由于指标属性的多样性，以往都是通过建立非线性的模型进行优化和评价。但这些决策模型[77~80]是对多个方程的联立求解，所以计算过程非常复杂，结果误差也比较大，而且得到的基本上是一些近似值，不是准确值。由于决策问题的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性，依据二元区间数的理论，本章采用了一种新的方法来研究多指标决策问题。在特殊处理指标的不可公度性的前提下，利用二元区间数的排序关系，通过建立线性模型来研究多指标的决策问题。并利用数学中的极值原理和运筹学中的非线性规划知识，在确定模型中各个指标的权重值的基础上，对模型进行了量化求解。最后把线性决策模型用于某市城市公交线网系统的优化中。

6.1.1　决策矩阵的标准化处理

对于权重区间未知的多指标决策问题，设方案集 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$；指标集 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$；各指标的权重向量 $[\overrightarrow{W}]=([\overline{w}_1],[\overline{w}_2],\cdots,[\overline{w}_m])$；多指标决策中方案集 A_i 关于指标集 G_j 的决策矩阵 $Y=([\overline{y}_{ij}])_{n\times m}$，其中，$[\overline{y}_{ij}]=f_i(x_j)=[y_{ij}^-,y_{ij}^+](i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 为方案 A_i 对指标 G_j 的属性值。

因此，为了使各指标有公度性，必须对决策矩阵进行标准化处理。令

$$J^+=\{效益型指标\},\quad J^-=\{成本型指标\},$$
$$J^{\text{fixed}}=\{固定型指标\},\quad J^{\text{interval}}=\{区间型指标\}$$

则有

(1) $[\bar{r}_{ij}]=\left([\bar{y}_{ij}]-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[\bar{y}_{ij}]\right)/\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[\bar{y}_{ij}]-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[\bar{y}_{ij}]\right), i=1,2,\cdots,n; j\in J^{+}$

(2) $[\bar{r}_{ij}]=\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[\bar{y}_{ij}]-[\bar{y}_{ij}]\right)/\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[\bar{y}_{ij}]-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[\bar{y}_{ij}]\right), i=1,2,\cdots,n; j\in J^{-}$

(3) $[\bar{r}_{ij}]=\dfrac{\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|[\bar{y}_{ij}]-[\bar{v}^{(*)}]|-|[\bar{y}_{ij}]-[\bar{v}^{(*)}]|\right)}{\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|[\bar{y}_{ij}]-[\bar{v}^{(*)}]|\right)}, i=1,2,\cdots,n; j\in J^{\text{fixed}}$

其中，$[\bar{v}^{(*)}]=[v^{-(*)},v^{+(*)}]$ 为固定值。

(4) $[\bar{r}_{ij}]=$

$$\begin{cases}[1,1]-\left[\{e_1^j-y_{ij}^{-},y_{ij}^{+}-e_2^j\}/\max\left\{e_1^j-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}^{-},\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}^{+}-e_2^j\right\}\right], & [\bar{y}_{ij}]\not\subset[e_1^j,e_2^j]\\ [1,1], & [\bar{y}_{ij}]\subset[e_1^j,e_2^j]\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,n; j\in J^{\text{interval}}$$

记标准化后的决策矩阵为 $Z=([\bar{r}_{ij}])_{n\times m}$。其中，$[\bar{r}_{ij}]=[r_{ij}^{-},r_{ij}^{+}]$。

6.1.2 决策原理

由于标准化处理后的指标区间值越接近区间[1,1]表示指标区间值越理想，即越优秀；指标区间值越接近区间[0,0]表示指标区间值越不理想，即越差。即如果标准化处理后的各指标区间都趋向于[1,1]，表示方案越理想；标准化处理后的各指标区间都趋向于区间[0,0]，表示方案越不理想。所以可以通过各方案的指标区间值(标准化处理后)距指标理想区间值[1,1]的距离大小来决定方案的优劣，对决策方案进行排序研究。

定义 6.1 理想方案

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{H}]&=([\bar{h}_1],[\bar{h}_2],\cdots,[\bar{h}_m])\\&=([\bar{z}_{11}]\vee[\bar{z}_{21}]\vee\cdots\vee[\bar{z}_{n1}],[\bar{z}_{12}]\vee[\bar{z}_{22}]\vee\cdots\vee[\bar{z}_{n2}],\cdots,\\&\quad[\bar{z}_{1m}]\vee[\bar{z}_{2m}]\vee\cdots\vee[\bar{z}_{nm}])\end{aligned}$$

其中，$[\bar{z}_{1i}]\vee[\bar{z}_{2i}]\vee\cdots\vee[\bar{z}_{ni}]$ 表示 $[\bar{z}_{1i}]=[z_{1i}^{-},z_{1i}^{+}]$，$[\bar{z}_{2i}]=[z_{2i}^{-},z_{2i}^{+}]$，$\cdots$，$[\bar{z}_{ni}]=[z_{ni}^{-},z_{ni}^{+}]$ 中的最大值，且 $i=1,2,\cdots,m$。

显然决策方案 A_j 越接近理想方案 $[\overrightarrow{H}]$，则决策方案 A_j 就越优；决策方案 A_j 越远离理想方案 $[\overrightarrow{H}]$，则决策方案 A_j 就越差。所以可用方案 A_j 偏离理想方案

$[\overrightarrow{H}]$ 的程度度量其优劣程度。

6.2　决策模型的建立及其求解

6.2.1　多指标决策模型的建立

令各指标的权重向量为 $[\overrightarrow{W}]=([\overline{w}_1],[\overline{w}_2],\cdots,[\overline{w}_m])$，则根据决策方案与理想方案的指标间距离大小，建立如下决策模型：

模型 1　$$\min[\overline{d}_i]=\sum_{j=1}^{m}[\overline{w}_j]([\overline{h}_j]-[\overline{r}_{ij}]),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{6-1}$$

$$\text{s.t.}:\sum_{j=1}^{m}w_j^-\leqslant 1,\quad \sum_{j=1}^{m}w_j^+=1,w_j^-,\quad w_j^+\geqslant 0$$

由于权重是未知，便于模型求解，把模型 1 变为

模型 2　$$\min\left[\overline{D}(w)\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}([\overline{h}_j]-[\overline{r}_{ij}])[\overline{w}_j]^2 \tag{6-2}$$

$$\text{s.t.}:\sum_{j=1}^{m}w_j^-\leqslant 1,\quad \sum_{j=1}^{m}w_j^+=1,\quad w_j^-,w_j^+\geqslant 0$$

6.2.2　决策指标权重系数的确定

解决多指标之间的矛盾性（主要指各指标的重要性）靠引入权（weight）这一概念。权是指标重要性的量度，即衡量指标重要性的手段[10]。权这一概念包含并反映下列几个重要因素：首先，决策人对决策指标的重视程度；其次，各决策指标属性值的差异程度；最后，各决策指标属性值的可靠程度。所以，权应当综合反映 3 种因素的作用，而且通过权，可以用各种方法将多目标决策问题化为单目标问题求解[10]。

由于权是指标重要性的数量化表示，所以如何确定权值是多指标决策问题的核心问题。一般说来，赋权方法可分为主观赋权法和客观赋权法两大类，后来从这两类赋权法中又派生出了一类综合集成赋权法[2]。

（1）主观赋权法。客观现实中的多指标决策问题受环境的影响，或受决策者的主观愿望的影响而呈现出不同方面的特征，这就给确定权重系数带来了困难[10]。因而在很多场合下，往往是通过主观途径来确定权重系数，即根据人们主观上对决策指标的重视程度来确定其权重系数的一类方法——主观权重法，它主要是通过专家咨询综合量化确定指标权数，有代表性的如德尔斐法、功效系数法、五级标度法和层次分析法等。

(2) 客观赋权法。由主观赋权法确定出的权重系数真实与否，在很大程度上取决于专家的知识、经验及偏好。为了避免在决定权重系数时受人为的干扰，可采取另一类确定权重系数的方法——客观赋权法。它主要根据决策指标样本自身的相关关系和变异程度确定权重系数，其基本思想是：权重系数应当是各个指标在指标总体中的变异程度和对其他指标的影响程度的度量，赋权的原始信息应当直接来源于客观环境，可根据各指标所提供的信息量的大小来决定相应指标的权重系数[10]。有代表性的客观赋权法如熵权系数法、主成分分析法、因子分析法、标准差系数法等。

(3) 综合集成赋权法。对于同一综合决策问题来说，主客观赋权法各有其优缺点，主观赋权法虽然反映了决策者的主观判断或直觉，但是会产生一定的主观随意性，而客观赋权法虽然通常利用比较完善的数学理论与方法，但忽略了决策者的主观信息，而此信息对于决策者来说，有时是非常重要的，因而现在有学者提出将主客观赋权法相结合，使所确定的权重系数同时体现主观信息和客观信息，这就又派生出一类新的赋权方法，通常称之为综合集成赋权法[10]。

1. *确定权重系数的基本方法*

在多属性决策问题中，各属性权重大小的分布直接影响着决策的结果。同时方案各属性之间的相对重要性，可以用属性的权重指标来刻画。由于权重系数按照其所依据的数据不同，或在决策中起的作用不同可以分为：主观权重、客观权重和组合权重。但对权重而言，必须满足

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

但当权重系数为二元区间数 $[\overline{w}_j] = [w_j^-, w_j^+]$，必须满足

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^- < 1, \quad \sum_{j=1}^{n} w_j^+ > 1, \quad w_j^-, w_j^+ \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

(1) 确定权重系数的主观法。主观权重指标的大小反映了决策方案的某个属性在决策者心目中的重要程度。由决策人员根据主观上对各指标的重视程度来确定权系数的一类方法，常用的有：五级标度法、层次分析法、两两比较法、德菲尔法专家调查法、循环打分法、二项式系数法等。

如相对比较法。相对比较法是将所有评价指标分别按行和列排列，构成一个正方形的表，再根据三级比例标度对任意两个指标的相对重要关系进行分析，并将评分值记入表中相应位置；将各个指标评分值按行求和，得到各个指标的评分总和；最后做归一化处理，得到指标的权重系数。所以，两两比较的评分分值

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_i \text{ 比 } x_j \text{ 重要时} \\ 0.5, & \text{当 } x_i \text{ 与 } x_j \text{ 同样重要时} \\ 0, & \text{当 } x_i \text{ 比 } x_j \text{ 不重要时} \end{cases}$$

则评分矩阵 $Q=(q_{ij})_{n\times m}$。显然 $q_{ii}=0.5, q_{ij}+q_{ji}=1$，则指标 i 的权重系数

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij} \tag{6-3}$$

(2) 确定权重系数的客观法。客观权重指标值的大小与决策者的主观偏好无关，客观权重所反映的是决策方案属性指标的客观分布特点。利用指标值所反映的客观信息确定权系数的一种方法，其原始数据由各指标在被评价对象中的实际数据中形成[3]。常见的方法有：离差法、熵权系数法、变异系数法、均方差法、主成分分析法、离差最大化法、拉开档次法和逼近理想点法等。

熵权系数法主要是从指标数值间的差异出发，在分析过程中通过熵值确定各指标的权重系数，具有一定的客观性和科学性。但是它主要是根据评价指标所能提供的有用信息量来确定指标权重，它所确定的权重并不能反映该指标的重要程度，所以在实际决策问题中最好与其他能反映指标重要性的赋权方法结合。具体步骤如下：

步骤 1　计算第 j 个指标在第 i 个方案所占的比重为

$$p_{ij}=x_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{m}x_{ij} \tag{6-4}$$

其中，x_{ij} 为标准化处理后的计算值。

步骤 2　计算第 j 个指标的熵值为

$$e_i=-(\ln n)^{-1}\sum_{i=1}^{m}p_{ij}\ln p_{ij} \tag{6-5}$$

步骤 3　计算第 j 个指标的差异系数为

$$g_j=1-e_j \tag{6-6}$$

步骤 4　计算第 j 个指标的权重为

$$w_j=g_j\Big/\sum_{j=1}^{n}g_j \tag{6-7}$$

(3) 确定权重系数的组合权法。组合即将多种方法获得的权重按照一定的规则综合在一起形成的综合性权重。这种权重系数法一般具有主观权重和客观权重的综合特点，既反映了决策者的主观偏好又反映了属性的客观分布特征。

如基于主客观权重乘积的归一化方法[3]：

设主观权重为 w_{zj}，客观权重为 w_{kj}，w_{zj} 与 w_{kj} 合成一个实用权重值为

$$w_j=w_{zj}w_{kj}\Big/\sum_{j-1}^{n}w_{zj}w_{kj} \tag{6-8}$$

2. 利用拉格朗日确定权重未知的系数

由于各个指标在决策过程中传输给决策者的信息量不同，所以在多指标决策中，需要给各指标赋予一权重区间值描述这些差异。为了对决策问题进行客观、公

正的决策，本章基于二元区间数理论，采用拉格朗日函数来确定权重值。

因式(6-2)为非线性规划中的极值问题，所以做拉格朗日函数来求 $[\overline{w}_j]=[w_j^-,w_j^+](j=1,2,\cdots,m)$。令

$$[\bar{D}(w,\lambda)]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}([\bar{h}_j]-[\bar{r}_{ij}])[\overline{w}_j]^2+2\lambda\Big(\sum_{j=1}^{m}[\overline{w}_j]-[1,1]\Big) \quad (6\text{-}9)$$

对式(6-9)中的 $[\overline{w}_j]=[w_j^-,w_j^+](j=1,2,\cdots,m)$ 和 λ 求导有

$$\frac{\partial[\bar{D}]}{\partial[\overline{w}_j]}=2\sum_{i=1}^{n}([\bar{h}_j]-[\bar{r}_{ij}])[\overline{w}_j]+2[\lambda,\lambda],\quad j=1,2,\cdots,m \quad (6\text{-}10)$$

$$\frac{\partial[\bar{D}]}{\partial\lambda}=\sum_{j=1}^{m}[\overline{w}_j]-[1,1] \quad (6\text{-}11)$$

令式(6-10)、式(6-11)均等于0，联立解方程组有

$$[\overline{w}_j]=2\sum_{i=1}^{n}([\bar{h}_j]-[\bar{r}_{ij}])\Big/\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}([\bar{h}_j]-[\bar{r}_{ij}]),\quad j=1,2,\cdots,m \quad (6\text{-}12)$$

把得到的 $[\overrightarrow{W}]=([\overline{w}_1],[\overline{w}_2],\cdots,[\overline{w}_m])$ 代入式(6-1)中，就得到方案 A_i 的决策区间值 $[\bar{D}_i]$ 的值，依据区间数大小排序规则，对 $[\bar{D}_i](i=1,2,\cdots,n)$ 进行大小排序，其中区间值最小的对应的方案最优。即若

$$[\bar{D}_i]=\min\{[\bar{D}_i]=[d_i^-,d_i^+]\mid i=1,2,\cdots,n\} \quad (6\text{-}13)$$

则第 i 个方案为最佳方案。

6.3 应用举例

采用第4章的案例进行分析。由第4章案例分析中已知条件可知，方案的决策区间矩阵为

$$Y=\begin{bmatrix}[31,35] & [51.3,59.5] & [57.8,60.5] & [24.7,25.5] & [55,60] & [1762.3,1886.1]\\ [17,20] & [71.3,75.5] & [53.2,55.5] & [18.1,18.5] & [35,40] & [998.3,1007.5]\\ [27,30] & [42.2,50.2] & [43.3,45.5] & [14.3,15.5] & [85,90] & [1235.3,1356.8]\\ [23,25] & [61.7,65.8] & [48.7,50.6] & [21.3,22.5] & [45,50] & [498.3,566.6]\\ [22,25] & [78.3,80.5] & [38.3,40.5] & [16.7,17.3] & [75,80] & [871.6,998.5]\end{bmatrix}$$

步骤1　决策区间矩阵的标准化处理得

$$Z=\begin{bmatrix}[0,0] & [0.301,0.307] & [0,0] & [1,1] & [0.217,0.25] & [1,1]\\ [1,1] & [0.811,0.835] & [0.692,0.7] & [0.623,0.75] & [0.497,0.50] & [0.312,0.334]\\ [0.301,0.333] & [0,0] & [1,1] & [0.177,0.25] & [1,1] & [0.533,0.599]\\ [0.623,0.667] & [0.492,0.505] & [0.297,0.3] & [0.48,0.505] & [0,0] & [0,0]\\ [0.617,0.667] & [1,1] & [0.298,0.82] & [0,0] & [0.713,0.75] & [0.298,0.327]\end{bmatrix}$$

步骤 2　定义理想方案。

理想方案为

$$[\vec{H}] = ([1,1],[1,1],[1,1],[1,1],[1,1],[1,1])$$

步骤 3　确定各个指标权重区间值。

由式(6-11)得各指标权重区间向量为

$$[\vec{W}] = ([0.179,0.197], [0.151,0.171], [0.137,0.161], [0.148,0.172], [0.157,0.185])$$

步骤 4　确定各个方案的决策值。

由式(6-1)得 5 种优化方案的决策区间值为

$$[\bar{D}_1] = [0.453,0.475],\quad [\bar{D}_2] = [0.316,0.334],\quad [\bar{D}_3] = [0.460,0.482]$$

$$[\bar{D}_4] = [0.497,0.519],\quad [\bar{D}_5] = [0.412,0.430]$$

步骤 5　决策方案排序。

依据二元区间数的排序关系，则

$$[\bar{D}_4] > [\bar{D}_3] > [\bar{D}_1] > [\bar{D}_5] > [\bar{D}_2]$$

所以方案的优劣顺序为

$$方案\ 2 \succ 方案\ 5 \succ 方案\ 1 \succ 方案\ 3 \succ 方案\ 4$$

即方案 2 为最佳方案。

总之，本章利用极值原理和非线性规划的知识，通过对权重未知的多指标决策问题的研究，建立了基于二元区间数的优化模型。并在对决策指标的权重系数选取进行综述的基础上，提出了利用主观赋权法、客观赋权法、组合赋权法等三类确定权重系数的方法。由于本章在权重取值上采用拉格朗日函数来确定权重值，这样不但克服了权重的主观性，而且保证了计算过程的科学性。所以该模型在实际应用中有一定的实用价值，特别适用于公司、企业中小规模的优化方案的决策分析。

第7章　基于二元区间数的多指标余弦决策模型

通过对多指标决策问题的研究，在兼顾方案偏好信息和客观信息的基础上，通过改进的层次分析法来确定决策指标的权重系数值。并在自定义"指标线段"、"理想指标线段"等的基础上，依据二元区间数的运算关系，利用数学中的余弦公式，来建立多指标决策问题的优化模型。通过求决策方案与理想方案中指标线段和理想指标线段之间夹角余弦的大小，来获得最佳决策方案。最后用该法对某城市公交线网进行了优化决策，获得了满意结果。

7.1　多指标决策问题的预备知识

近年来，多属性问题的研究已经取得了很大的进展。国内外许多学者提出了许多决策方法，并已成为运筹学、管理科学和系统科学等学科中十分活跃的研究课题。但由于决策问题本身的复杂性和决策者本身条件限制，各种决策方法都存在不同程度的缺点和不足，特别是权重未知的决策问题中，决策方法更需要进一步探索和完善，所以本章依据二元区间数排序基本知识，对权重未知的多指标决策问题进行理论研究，构建一种新的模型。该模型不但在改进了已有层次分析法的基础上，通过相互比较来减少权重的主观性和计算过程，而且在定义指标线段和理想指标线段的基础上，通过比较它们夹角余弦的大小来建立基于二元区间数的决策模型。

7.1.1　决策矩阵的标准化处理

设多指标决策问题有 n 个待选方案记为 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$；评价方案优劣的指标记为 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$；$Y=(y_{ij})_{n\times m}$ 表示方案集 A_i 关于属性集 G_j 的决策矩阵，其中 $y_{ij}=f_i(x_j)(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 为方案 A_i 对指标 G_j 的属性值。

1. *决策矩阵标准化处理的方法*

在多指标决策问题中，需要将多个方案的多个属性综合在一起进行研究，最后得到决策结果。而决策方案的各个属性之间由于量纲不同、单位不同、数量级不同、度量方法不同，不能直接利用初始属性指标值进行比较和综合排序。所以，在对方案进行综合排序之前，需要消除这些不可公度性，使之成为能够直接比较和综

合排序的指标，这就要对决策指标进行规范化处理，即决策指标的标准化处理[2]。

在决策矩阵 $Y=(y_{ij})_{n\times m}$ 中：

方法 1　极差变换法。

1981 年，Hwang Yoon 提出[2]将决策矩阵 $Y=(y_{ij})_{n\times m}$ 转换成规范化的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$。

对于正向指标

$$r_{ij}=\left(y_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}\right)/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

对于负向指标

$$r_{ij}=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}-y_{ij}\right)/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

标准化后的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 叫做标准极差变换矩阵。

方法 2　线性变换法。

1987 年，陈珽提出[2]将决策矩阵 $Y=(y_{ij})_{n\times m}$ 转换成规范化的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$。

对于正向指标

$$r_{ij}=\frac{y_{ij}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}y_{ij}}$$

对于负向指标

$$r_{ij}=\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}y_{ij}}{y_{ij}}$$

标准化后的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 叫做标准线性变换矩阵。

方法 3　向量归一化法。

1981 年，Hwang Yoon 提出[2]将决策矩阵 $Y=(y_{ij})_{n\times m}$ 转换成规范化的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$。

令

$$r_{ij}=\frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}y_{ij}^2}}$$

标准化后的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 叫做标准向量归一化矩阵。

方法 4　标准样本变化法[2]。

令

$$r_{ij}=\frac{y_{ij}-\bar{y}_j}{s_j}$$

其中，样本均值 $\bar{y}_j=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}y_{ij}$；样本方差 $s_j=\sqrt{\frac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(y_{ij}-\bar{y}_j)^2}$。

标准化后的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 叫做标准样本变化矩阵。

方法 5　比重变换法。

1981 年，Hwang Yoon 提出[2]将决策矩阵 $Y=(y_{ij})_{n\times m}$ 转换成规范化的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$。

对于正向指标

$$r_{ij}=\frac{y_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}y_{ij}}$$

对于负向指标

$$r_{ij}=\frac{y_{ij}^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}y_{ij}^{-1}}$$

标准化后的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 叫做标准比重变换矩阵。

方法 6　固定型变化法。

2008 年，张全提出将决策矩阵 $Y=(y_{ij})_{n\times m}$ 转换成规范化的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$。

令

$$r_{ij}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y_{ij}}{y_j^*}+\frac{y_j^*}{y_{ij}}\right)\right]^{-1}$$

其中，y_j^* 为指标 G_j 上各方案的理想值，$j=1,2,\cdots,m$。

标准化后的决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 叫做标准固定型矩阵。

2. 余弦决策矩阵的标准化处理

为了消除效益型指标、成本型指标和适中型指标(取值越接近决策者的某个满意值越好)之间的不可公度性及矛盾性，将决策矩阵标准化处理：

(1) 对效益型指标 G_j，令

$$r_{ij}=\left(y_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}\right)/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}\right),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7-1}$$

(2) 对成本型指标 G_j，令

$$r_{ij}=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}-y_{ij}\right)/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}y_{ij}\right),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7-2}$$

(3) 对适中型指标 G_j，令

$$r_{ij}=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_{ij}-y^*|-|y_{ij}-y^*|\right)/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_{ij}-y^*|\right),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7-3}$$

其中，y^* 为满意值。

记标准化后的决策矩阵为 $R=(r_{ij})_{n\times m}$。

7.1.2　指标权重系数的确定

目前，确定权重系数的方法大致可分为两类：一类是主观赋权法，如层次分析法、德尔菲法等；另一类是客观赋权法，如主成分分析法、因子分析法等。由于无法获得较多的训练样本，因此不能采用客观赋权法，也无法通过计算属性测度向量的相关系数求得指标权重值。所以本章利用改进的层次分析法来确定评价指标权重系数。具体方法如下：

(1) 构造比较矩阵。根据确定出的各评价因子的重要性秩序，得出相应的比较矩阵为

$$A=(a_{ij})_{n\times m} \tag{7-4}$$

其中，a_{ij} 为第 i 因素与第 j 因素相对比的重要性，且

$$a_{ij}=\begin{cases}2, & 第\ i\ 因素比第\ j\ 因素重要\\ 1, & 第\ i\ 因素和第\ j\ 因素同样重要\\ 0, & 第\ j\ 因素比第\ i\ 因素重要\\ 1, & i=j\end{cases} \tag{7-5}$$

(2) 构造判断矩阵 B。对比较矩阵 A 按行求和 $r_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$，构造判断矩阵

$$B=(b_{ij})_{n\times m} \tag{7-6}$$

其中

$$b_{ij}=\begin{cases}\dfrac{r_i-r_j}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}}(k_m-1)+1, & r_i>r_j\\ \left[\dfrac{r_i-r_j}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}}(k_m-1)+1\right]^{-1}, & r_j>r_i\end{cases}$$

且 $k_m=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}\cdot\left[\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}\right]^{-1}$。

(3) 判断矩阵 B 的传递矩阵为

$$C=(\ln b_{ij})_{n\times m} \tag{7-7}$$

(4) 传递矩阵 C 的最优传递矩阵为

$$D=(d_{ij})_{n\times m} \tag{7-8}$$

其中，$d_{ij}=\dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\ln b_{ik}-\ln b_{jk})$。

(5) 第 j 个指标的权重系数为

$$[\overline{w}_j]=[w_j^-,w_j^+],\quad j=1,2,\cdots,m \tag{7-9}$$

其中，$w_j^- = \overline{w}_j = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} 10^{d_{ij}}}$；$w_j^+ = \overline{w}_j \cdot \left[\sum_{k=1}^{m} \overline{w}_k\right]^{-1}$。

各指标的权重区间向量为

$$[\vec{W}] = ([\overline{w}_1],[\overline{w}_2],\cdots,[\overline{w}_m]) \tag{7-10}$$

7.2 基于二元区间数的决策原理

7.2.1 决策中的数学原理

定义 7.1 决策指标线段是指二维空间 xoy 中，以原点 o 为起点，以决策方案 A_i 在指标 G_j 下的值(标准化处理后的值) r_{ij} 为终点 a_{ij}，构成的有向线段 oa_{ij}，见图 7-1。

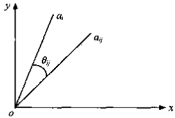


图 7-1 各指标线段定义示意图

定义 7.2 理想指标线段是指二维空间 xoy 中，以原点 o 为起点，以理想方案 A^* 在指标值 g_j 为终点 a_i，构成的有向线段 oa_i，见图 7-1。

定义 7.3 决策指标线段夹角是指二维空间 xoy 中，理想指标线段与决策指标线段之间的夹角(夹角为锐角)，见图 7-1。

定义 7.4 令集合 $A = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则它的范数值为

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \tag{7-11}$$

定义 7.5 决策方案 $A_i = (r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})$ 在指标 G_j 下的决策指标线段 oa_{ij} 与理想方案

$$A^* = (g_1,g_2,\cdots,g_m)$$

的指标值 g_j 的理想指标线段 oa_i 的夹角余弦值为

$$c_{ij} = \cos\theta_{ij} = \frac{r_{ij} \cdot g_j}{\|A_i\| \cdot \|A^*\|} = \frac{r_{ij} \cdot g_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{m} g_j^2}}, \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{7-12}$$

7.2.2 余弦决策原理

根据优选的相对性，可作如下定义：

定义 7.6 理想方案

$$A^* = (g_1,g_2,\cdots,g_m)$$

其中，$g_j = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} r_{ij}, j = 1,2,\cdots,m$。

决策方案

$$A_i = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

令它们在二维空间 xoy 中对应的点分别为 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 和 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})$，则有：

(1) 理想指标线段集合为 $\{oa_1, oa_2, \cdots, oa_m\}$。

(2) 决策指标线段集合为 $\{oa_{i1}, oa_{i2}, \cdots, oa_{im}\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 。

(3) 理想指标线段 oa_i 和决策指标线段 oa_{ij} 的夹角为 $\theta_{ij}(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$。

于是得到决策方案 A_i 与理想方案 A^* 之间的加权余弦值

$$[\bar{D}_i] = [\varpi_1]\cos\theta_{i1} + [\varpi_2]\cos\theta_{i2} + \cdots + [\varpi_m]\cos\theta_{im} \tag{7-13}$$

其中，$i = 1,2,\cdots,n$。

由于夹角的余弦值 $0 \leqslant \cos\theta_{ij} = c_{ij} \leqslant 1$，且 c_{ij} 的值随 θ_{ij} 的增大而减小，所以 c_{ij} 越大表示决策方案 A_i 在指标 G_j 下的值 r_{ij} 与理想方案 A^* 的指标值 g_j 越接近。因此 $[\bar{D}_i]$ 的值越大表示决策方案 A_i 越接近理想方案 A^*，即决策方案 A_i 越优。于是最优方案的余弦决策模型如下：

最优方案 A_i

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n}[D_i] = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left[\sum_{j=1}^{m}[\varpi_j]\cos\theta_{ij}\right] \tag{7-14}$$

7.3 模型应用

本章采用第4章的案例分析进行应用研究。

由第4章的案例分析可知，决策矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} 35 & 59.5 & 60.5 & 25.5 & 60 & 1886.1 \\ 20 & 75.5 & 55.5 & 18.5 & 40 & 1007.5 \\ 30 & 50.2 & 45.5 & 15.5 & 90 & 1356.8 \\ 25 & 65.8 & 50.6 & 22.5 & 50 & 566.6 \\ 25 & 80.5 & 40.5 & 17.5 & 80 & 998.5 \end{bmatrix}$$

步骤1 标准化处理得

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.307 & 0 & 1 & 0.250 & 1 \\ 1 & 0.835 & 0.700 & 0.750 & 0.500 & 0.334 \\ 0.333 & 0 & 1 & 0.250 & 1 & 0.599 \\ 0.667 & 0.505 & 0.300 & 0.505 & 0 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0.820 & 0 & 0.750 & 0.327 \end{bmatrix}$$

步骤 2 确定决策指标的权重区间向量。

依据改进的层次分析法，得到各指标的权重区间值见表 7-1。

表 7-1 权重区间数

方案	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
$[\overline{w}_j]$	[0.70,0.76]	[0.42,0.48]	[0.46,0.48]	[0.52,0.56]	[0.72,0.78]	[0.52,0.58]

步骤 3 确定余弦值。

由标准决策矩阵可知理想方案 $A^* = (1,1,1,1,1,1)$，则每个决策方案的指标与理想方案的指标的余弦值见表 7-2。

表 7-2 余弦值

方案	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
方案 1	0.3251	0.0874	0	0.2978	0	0.0745
方案 2	0.1086	0.2377	0.1633	0.2223	0.2886	0.1491
方案 3	0.1447	0	0.2333	0.0744	0.0961	0.2982
方案 4	0	0.1446	0.0670	0.1504	0.1925	0
方案 5	0.1063	0.2847	0.1913	0	0.1925	0.2236

步骤 4 确定决策方案的加权余弦区间。

由表 7-2 和表 7-3 可知：

$$[\overline{D}_1] = \sum_{j=1}^{6} [\overline{w}_j]\cos\theta_{1j} = \sum_{j=1}^{6} [\overline{w}_j] c_{1j} = [0.1309, 0.1507]$$

同理

$$[\overline{D}_2] = [0.1854, 0.2050], \quad [\overline{D}_3] = [0.1401, 0.1601]$$

$$[\overline{D}_4] = [0.0865, 0.0955], \quad [\overline{D}_5] = [0.1473, 0.1671]$$

步骤 5 确定最优方案。

依据二元区间数的排序准则，则

$$[\overline{D}_2] > [\overline{D}_5] > [\overline{D}_3] > [\overline{D}_1] > [\overline{D}_4]$$

故方案 2 为最佳方案。

总之，本章是利用经典数学中的余弦公式，在定义指标线段和理想指标线段的基础上，依据二元区间数的基本理论，建立了多指标决策的余弦模型，克服了许多决策优化模型(如灰色决策模型、关联度决策模型等)中的计算复杂、过程长等不足，该法具有计算过程简单、使用方便等特点，所以该法具有较大的实用价值。

第8章 基于二元区间数的城市公共交通系统综合评价

利用二元区间数理论，在构建基于二元区间数的理想评价法基础上，对城市公共交通系统进行了综合评价。在综合分析影响城市公共交通系统的多种因素基础上，探讨了城市公共交通系统的评价机理，构建城市公共交通系统的评价指标体系。在利用变异系数确定指标权重的情况下，依据属性二元区间数的概念，对城市公共交通系统进行了综合评价，提出了城市公共交通系统的理想区间评价模型，并进行了应用分析。

8.1 城市公共交通系统的概述

由于现实社会中问题的复杂性、因素的不确定性以及人类思维的模糊性，人们很难客观地对问题做出准确的评判和决策。例如，对城市公共交通系统的公交服务水平，由于评判因素的不确定性和评判等级的模糊性，人们很难用一个确定的数值来划分它，给出一个准确的评价结果，使得评判对象就某些评判指标的"优"、"劣"评判只能是一个区间，即是一个区间数，这个区间数我们定义为二元区间数。通常的区间数评判都是以某区间数的加权平均数作为某评判对象在某评判指标上的最后得分，这样无形中便丢失了许多有用的信息[81]。若能对区间数进行整体考虑，以二元区间数的大小来评判最终的"优"、"劣"，将会更加客观、真实地反映评价结果。所以，本章基于二元区间数的排序关系，构造基于二元区间数的一种新的理想评价方法，并用该法对城市公共交通系统进行评价研究。

在城市公共交通系统的评价中，存在着许多不确定的因素。一般地，可以把不确定因素分为两类：一类具有随机性，一类具有模糊性。前者要由概率统计学加以研究，后者则要用不确定性数学理论去解决。就城市公共交通系统情况而言，由于城市公共交通系统往往需要多个指标刻画其本质与特征，并且人们对事物每个指标的评价又往往不是简单的好与不好，而是采用模糊语言分为不同的评语。所以，它是一个具有不确定性的问题，利用区间数理论进行综合评价是比较理想的。

城市公共交通系统的评价就是对城市公共交通系统在规模、布局上与社会经济发展需求的适应情况以及在容量上与交通量的适应情况做出定性和定量的分析，为城市公共交通的发展目标提供决策依据。对现状城市公共交通系统评价，就是发现存在的主要问题和找出解决问题的有效途径。目前，城市公共交通系统评

价的方法主要有模糊评价、灰色关联度评价和物元分析评价等。模糊评价是应用隶属函数来刻画公共交通系统的模糊性，能够客观地反映实际情况，但该法强调极值作用，信息量损失多，权重值的选取不够科学。灰色关联度评价是依据差异信息原理、解的非唯一性原理等，比较适合于评价中信息不完全、评价指标多、部分指标之间存在相关或重复的问题，但该法计算量大、评价过程复杂。物元分析评价是以关联函数理论创立的多元数据量化评价，通过建立多指标性能参数的质量综合评判模型，来以定量的数值表示评定结果，从而能够较完整地反映评价对象的综合水平。由于城市公共交通系统是一个复杂系统，越来越多地受到不确定性因素的影响，而且评价指标种类繁多、性质各异，所以每种评价方法都有自己的优点和不足。

本章在分析传统综合评价方法的基础上，整合主观评价与客观评价，提出一种基于区间数理论的综合评价方法，该方法融合区间分析法和综合评分法，在对评价指标值进行模糊化、归一化和无量纲化的基础上，对城市公共交通系统进行评价，既可避免人为的主观片面性，又能对专家意见给予足够的重视，并能对评价过程中遇到的信息的不完备性和不确定性做出相应的量化处理。该方法应用于城市公共交通系统的评价中，评价结果不仅反映了城市公共交通系统的现状水平，而且也考虑了城市交通可持续发展的指导思想，使城市公共交通系统的评价结果更为公正，使人们对城市交通问题的认识更加客观、合理。

8.2　城市公共交通系统的评价机理

在进行城市公共交通系统综合评价时，要根据城市公共交通系统发展的目标确立一组相互关联的评价指标。指标是反映系统要素或效益的数量概念和具体数字，它包括指标的名称和指标的数字两部分[10]。指标体系是评价城市公共交通系统发展水平的基础，是综合反映城市公共交通系统现状水平的依据。城市公共交通系统的综合评价，实质上就是通过建立一系列指标，对城市公共交通系统结构与功能、社会经济适应性、环境影响与资源利用等主要特征进行衡量和评估，辨别系统的发展水平，进而提出调控措施。本章通过对城市公共交通系统的影响因素、度量指标、评价方法等的研究，使人们能够全面认识城市公共交通系统的现实状况、内在形成机理与外在反馈结果之间的深层次关系，从而找出提高城市公共交通系统质量的方法与途径，制定改善策略与保障体系，达到治标又治本的城市公共交通可持续发展目标。

8.2.1　城市公共交通系统的评价目标

根据城市交通系统可持续发展规划的原则与指导思想，城市公共交通系统的评价就是帮助交通规划、建设、管理等相关部门建立系统工程的概念以及解决城市

交通问题的总体思路，给出解决城市交通问题的总体框架和城市交通管理的发展前景，引导城市交通管理的科学化、现代化进程。所以城市公共交通系统的评价目标：满足交通需求、有效利用资源、改善环境质量。

8.2.2　评价指标设置的原则与功能

城市公共交通系统的评价指标体系是描述、评价城市公共交通系统的重要依据。所以建立城市公共交通系统评价指标体系是为城市公交系统的优化调控服务，是综合评价城市公共交通系统现状和能力的重要依据。

(1) 设置的原则。城市公共交通系统评价指标体系的设置，必须遵循一定的原则，充分表述城市公共交通系统的内涵和特征。综合国内外学者有关城市公共交通系统评价指标体系的研究成果，建立切实可行、有利于城市公共交通系统评价的指标体系应遵循以下原则：科学性原则、可比性原则、可操作性原则、系统性原则。

(2) 设置的功能。一个科学、客观的城市公共交通系统评价指标体系有助于了解城市交通发展现状，有助于制定城市交通发展规划，有助于提供分析和预测模型的基本数据和对城市交通发展进行监测和解释。概括起来，城市公共交通系统评价指标体系有三大功能：判断功能、规划功能、导向功能。

8.2.3　构建城市公共交通系统评价指标体系

城市公共交通系统是一个具有多种功能的服务系统。评价目的是改善居民出行可达性、推动城市交通结构的合理调整、促进城市交通的可持续发展，所以其评价体系应该体现城市公共交通系统的内涵，在空间上反映其空间布局和结构，在数量上反映其规模大小，在层次上反映其功能水平，并且包含城市公共交通系统影响因素的多个方面。依据城市公共交通系统评价原则，通过综合分析和考虑得到评价指标体系，见图 8-1。

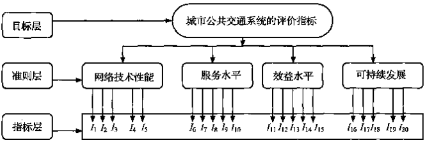


图 8-1　城市公共交通系统的评价指标体系

图中，I_1 为公交运营线路数(条)；I_2 为公交线网密度(km/km²)；I_3 为公交车辆拥有率(%)；I_4 为公交站点的覆盖率(%)；I_5 为平均站距(km)；I_6 为行车准点率(%)；I_7 为事故频率(%)；I_8 为全天线路满载率(%)；I_9 为乘客平均出行时耗(min)；I_{10}为乘客平均换乘率(%)；I_{11}为居民年乘公交车次数(次/(年・人))；I_{12}为百车公里成本(万元/标台)；I_{13}为运营收益率(%)；I_{14}为完好车率(%)；I_{15}为全员劳动生产率(%)；I_{16}为土地利用吻合程度(定性评价，以百分制表示)；I_{17}为线网发展适应性(定性评价，以百分制表示)；I_{18}为沿线土地开发价值(元/km²)；I_{19}为客运效率(%)；I_{20}为公共交通分担率(%)。

8.3　城市公共交通系统评价的等级设置机理

城市公共交通系统是一个复杂系统。对于一个城市公共交通系统的发展状况，根据其运动学分析，其运动发展特征由该系统的正负性、递增性、协调性和稳定性决定。因此对可持续发展过程，城市公交系统应该满足如下准则：正负性准则、递增性准则、协调性准则、稳定性准则。

所以依据上述准则，为了得到城市公共交通系统科学合理的评价结果，将城市公共交通系统的评价结果分为 5 个级别，以"＋"和"－"分别表示正负性、递增性、协调性和稳定性在每一等级内的强弱差别，见表 8-1。

表 8-1　公共交通系统的评价等级

等级		正负性	递增性	协调性	稳定性
一级	优秀	＋＋＋＋＋	＋＋＋＋＋	＋＋＋＋＋	＋＋＋＋＋
二级	良好	＋＋＋＋－	＋＋＋＋－	＋＋＋＋－	＋＋＋＋－
三级	中等	＋＋＋－－	＋＋＋－－	＋＋＋－－	＋＋＋－－
四级	一般	＋＋－－－	＋＋－－－	＋＋－－－	＋＋－－－
五级	差	＋－－－－	＋－－－－	＋－－－－	＋－－－－

8.4　城市公共交通系统的综合评价原理

城市公共交通系统综合评价的基本原理是把城市公共交通系统的 20 个评价指标看成是公共交通系统决策中的 20 个目标函数 $f_j(x)(j=1,2,\cdots,20)$，而把反映城市公共交通系统的 5 个等级视为二元区间数 $[\overline{X}_i]=[x_i^-,x_i^+](i=1,2,3,4,5)$。

(1) 对于每个目标函数分别有其最优值为 $f_j^*([\overline{X}_i])(j=1,2,\cdots,20;i=1,2,3,4,5)$，则最优值 $f_j^*([\overline{X}_i])$ 指的是 i 等级所对应的第 j 个标准指标值。

(2) 如果所有这些指标的最优解为二元区间数

$$[\bar{X}_{ij}^{(*)}] = [x_{ij}^{-(*)}, x_{ij}^{+(*)}],\quad i = 1,2,3,4,5; j = 1,2,\cdots,20$$

则最优解 $[\bar{X}_{ij}^{(*)}] = [x_{ij}^{-(*)}, x_{ij}^{+(*)}]$ 指的是第 j 个标准指标值所对应的 i 等级。

(3) 设二元区间数 $[\bar{X}_i^{(*)}] = [x_i^{-(*)}, x_i^{+(*)}]$，则在二元区间数 $[\bar{X}_i^{(*)}] = [x_i^{-(*)}, x_i^{+(*)}]$ 处所有的目标函数都同时达到各自的最优值时，其相应的解 $[\bar{X}_i^{(*)}] = [x_i^{-(*)}, x_i^{+(*)}]$ 即为各指标所代表的某一城市某一时间内的城市公共交通系统综合评价的 i 等级。

(4) 基于二元区间数的理想决策模型就是把城市公共交通系统的系统评价结果的最优值二元区间数 $f_j^*([\bar{X}_i])$ 看成理想点区间。把一个城市某一时间内的城市公共交通系统评价实际指标值与在理想点(由二元区间数构成的点)处的城市公共交通系统评价标准指标值的距离区间作为评价该城市公共交通系统评价的指标区间与在理想点处的城市公共交通系统评价标准指标的接近程度，把距离最小的理想点对应的等级看成该城市公共交通系统综合评价的等级[82]。

8.4.1　评价指标的分级标准

根据城市公共交通系统的实际情况与特点，制定出评价指标体系的各级标准值，以便将指标的实际监测值与各级标准值进行比较，并评价识别公共交通系统目前的实际状况。因此依据我国城市交通的实际情况，在大量调查和研究基础上，根据《城市道路交通规划设计规范》和《城市道路交通管理评价体系》(陆化普，2003)，将城市公共交通系统评价指标体系中的各指标评价结果分成优秀(一级)、良好(二级)、中等(三级)、一般(四级)、差(五级)5 个级别。表 8-2 列出各评价指标与对应等级之间的情况。

表 8-2　评价指标的分级标准区间

评价指标	一级	二级	三级	四级	五级
公交运营线路数	[90,120]	[70,90]	[50, 70]	[30, 50]	[0,30]
公交线网密度	[5,10]	[4,5]	[2.5,4]	[1.2,2.5]	[0,1.2]
公交车辆拥有率	[13,20]	[10,13]	[7,10]	[5,7]	[0,5]
公交站点覆盖率	[0.6,1]	[0.55,0.6]	[0.48,0.55]	[0.43,0.48]	[0,0.43]
平均站距	[10,15]	[7.5,10]	[5.0,7.5]	[2.5,5.0]	[0,2.5]
行车准点率	[0,20]	[20,25]	[25,35]	[35,48]	[48,60]
事故率	[0,5]	[5,10]	[10,15]	[15,20]	[20,50]
全天线路满载率	[0,1.15]	[1.15,1.35]	[1.35,1.48]	[1.48,1.60]	[1.60,2.0]

续表

评价指标	一级	二级	三级	四级	五级
乘客平均出行时耗	[0,0.65]	[0.65,0.75]	[0.75,0.85]	[0.85,0.95]	[0.95,1.0]
乘客平均换乘率	[0,0.55]	[0.55,0.65]	[0.65,0.75]	[0.75,0.85]	[0.85,1.0]
居民年乘公交车次数	[380,500]	[280,380]	[180,280]	[100,180]	[0,100]
百车公里成本	[90,100]	[80,90]	[65,80]	[50,60]	[0,50]
运营收益率	[0.9,1]	[0.8,0.9]	[0.7,0.8]	[0.5,0.7]	[0.0,0.5]
完好车率	[80,100]	[70,80]	[60,70]	[50,60]	[0,50]
全员劳动生产率	[1.0,1.25]	[1.25,1.5]	[1.5,1.75]	[1.75,2.25]	[2.25,5]
土地利用吻合程度	[80,100]	[70,80]	[60,70]	[50,60]	[0,50]
线网发展适应性	[90,100]	[80,90]	[70,80]	[55,70]	[0,55]
沿线土地开发价值	[85,100]	[75,85]	[65,75]	[50,65]	[0,50]
客运效率	[28,100]	[25,28]	[20,25]	[17,20]	[0,17]
公共交通分担率	[22,50]	[17,22]	[14,17]	[10,14]	[0,10]

8.4.2　综合评价的基本步骤

步骤 1　建立目标向量函数。

选用城市公共交通系统综合评价标准所控制的 20 个指标来综合评价城市公共交通系统，由此构造目标向量函数为

$$F([\overline{x}]) = (f_1([\overline{x}]), f_2([\overline{x}]), \cdots, f_{20}([\overline{x}]))^{\mathrm{T}} \tag{8-1}$$

其中，$f_j([\overline{x}])$ 为第 j 个指标的目标函数，$j = 1,2,\cdots,20$。

步骤 2　构造城市公共交通系统指标向量。

设第 k 次考察城市公共交通系统指标向量为

$$F_k([\overline{x}]) = (f_{1,k}([\overline{x}]), f_{2,k}([\overline{x}]), \cdots, f_{20,k}([\overline{x}]))^{\mathrm{T}} \tag{8-2}$$

其中，$k = 1,2,\cdots,l$ 且 l 为考察城市公共交通系统的次数；$f_{j,k}([\overline{x}])$ 为第 k 次考察城市公共交通系统第 j 个指标值。

步骤 3　构造理想区间向量。

城市公共交通系统综合评价标准中的每一等级的标准指标构成理想区间向量

$$[\overrightarrow{\overline{F}_i^*}] = ([\overline{F}_{1,i}^*], [\overline{F}_{2,i}^*], \cdots, [\overline{F}_{20,i}^*])^{\mathrm{T}} \tag{8-3}$$

其中，$[\overline{F}_{j,i}^*] = [a_{j,i}, b_{j,i}]$($i = 1,2,\cdots,5$)(5 为等级个数)，$a_{j,i}, b_{j,i}$ 分别为第 i 个等级第 j 个标准指标所对应区间的左右端点。

步骤 4　利用变异系数确定评价指标的权重系数。

为了避免专家赋权所带来的主观偏好性，采用变异系数来确定评价指标的权重。这样一方面充分利用各指标本身考察数据所提供的信息；另一方面通过变异系数的归一化处理，可以防止指标之间因量纲不同而对权重的影响，这样更能反映指标的相对主要程度。

设第 $j(j=1,2,\cdots,20)$ 个评价指标的变异系数为

$$\delta_j=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(f_{j,i}-\overline{f}_{j,i})^2}\Big/\overline{f}_{j,i}$$

其中，$\overline{f}_{j,i}$ 为第 j 个评价指标特征值的均值，即 $\overline{f}_{j,i}=\frac{1}{2}(a_{j,i}+b_{j,i})$。则第 j 个评价指标的权重系数为

$$w_j=\delta_j\Big/\sum_{j=1}^{20}\delta_j \tag{8-4}$$

所以 20 个指标的权重向量为

$$W=(w_1,w_2,\cdots,w_{20})^{\mathrm{T}}$$

步骤 5　确定最小距离。

为了提高评价结果的精度，取第 k 次考察城市公共交通系统的考察值 $F_k([\overline{x}])$ 到第 i 个等级理想区间向量的距离为

$$\begin{aligned}d(i,k,W)&=\|F_k([x])-F_j^*([\overline{x}])\|\\&=\sum_{j=1}^{n}w_j\cdot\Delta(i,k,j)\end{aligned} \tag{8-5}$$

其中，$\Delta(i,k,j)$ 的计算如下[82]：

(1) 当 $i=1$ 时：

$$\Delta(i,k,j)=\begin{cases}(f_{i,k}-a_{j,1})/(b_{j,1}-a_{j,1}), & f_{j,k}\in[a_{j,1},b_{j,1}]\\1+(f_{j,k}-a_{j,2})/(b_{j,2}-a_{j,2}), & f_{j,k}\in[a_{j,2},b_{j,2}]\\3, & f_{j,k}>b_{j,2}\end{cases} \tag{8-6}$$

(2) 当 $i=2,3,4$ 时：

$$\Delta(i,k,j)=\begin{cases}(f_{i,k}-a_{j,i})/(b_{j,i}-a_{j,i}), & f_{j,k}\in[a_{j,i},b_{j,i}]\\1+(f_{j,k}-a_{j,i-1})/(b_{j,i-1}-a_{j,i-1}), & f_{j,k}\in[a_{j,i-1},b_{j,i-1}]\\1+(f_{j,k}-a_{j,i+1})/(b_{j,i+1}-a_{j,i+1}), & f_{j,k}\in[a_{j,i+1},b_{j,i+1}]\\3, & f_{j,k}<a_{j,i-1},f_{i,k}>b_{j,i+1}\end{cases} \tag{8-7}$$

(3) 当 $i=5$ 时：

$$\Delta(i,k,j)=\begin{cases}(f_{i,k}-a_5)/(b_{j,5}-a_{j,5}), & f_{j,k}\in[a_{j,5},b_{j,5}]\\1+(f_{j,k}-a_{j,4})/(b_{j,4}-a_{j,4}), & f_{j,k}\in[a_{j,4},b_{j,4}]\\3, & f_{j,k}<b_{j,4}\end{cases} \tag{8-8}$$

其中，$i=1,2,\cdots,5;k=1,2,\cdots,l;j=1,2,\cdots,20$。

步骤 6 确定评价等级。

对于每次考察城市公共交通系统，考察后的综合评价值为

$$\tau=\min_{i} d(i,k,W) \tag{8-9}$$

其中，τ 对应的等级 i，即为第 k 次考察城市公共交通系统综合评价的等级。

8.4.3 等级配置原则

综合评价值 τ 不但能够反映目前城市公共交通系统的现状水平，又能够综合对比研究该城市公共交通系统发展的动态状况，而且还可以用于同一时期不同城市之间公共交通系统发展状况的比较研究。同时也为规划研究人员提供城市公共交通系统进一步发展的思路和方向。该值越大表示该市公共交通系统发展越好。所以由式(8-9)计算出综合评价值 τ 后，必须有一个等级标准，才能描述一个城市公共交通系统的发展程度。参照国内外有关研究成果，结合有关专家的意见，笔者设计 5 个等级标准来描述城市公交系统发展程度，见表 8-3。

表 8-3 评价标准区间

评价等级	一 级	二 级	三 级	四 级	五 级
	优 秀	良 好	中 等	一 般	差
等级区间	$0.8\leqslant\tau\leqslant1.0$	$0.6\leqslant\tau<0.8$	$0.4\leqslant\tau<0.6$	$0.3\leqslant\tau<0.4$	$0.0\leqslant\tau<0.3$

等级配置原则：由式(8-9)中的综合评价值 τ 和表 8-3 中的相应等级范围进行配置。计算值 τ 属于某取值范围，城市公共交通系统发展水平就属于该取值范围对应的评价级别。

8.5 应用分析

现以某市 2005 年的城市公共交通系统为样本，取 $k=1$，即考察次数为 1 次。依据 2005 年该城市科技计划项目研究内容，对该城市现有公共交通系统进行综合考察。以图 8-2 中的评价指标体系作为该城市公共交通系统的评价指标，利用课题组调查得到的相关数据，来计算该城市现有公共交通系统的综合评价值。步骤如下：

步骤 1 依据课题组调查得到的相关数据，得到该城市公共交通系统 20 个评价指标的考察值为

$$[\overrightarrow{F_1}]=([0,57,0,59],[2.67,2.69],[7.0,7,2],[0.60,0.62],[6.6,6.8],[42,44],$$
$$[56,58],[1.41,1.43],[0.70,0.72],[0.78,0.80],[175,176],[70,72],$$

[30,32],[74,76],[1.62,1.64],[74,76],[75,77],[86,88],[30,32],[15,17])

步骤 2　依据公式(8-4)求得各指标的权重值为

$$W=(0.042,0.048,0.053,0.057,0.051,0.049,0.043,0.057,0.047,0.049,0.051,0.055,0.042,0.054,0.053,0.054,0.056,0.047,0.048,0.045)$$

步骤 3　依据公式(8-5)和 20 个评价指标的考察值，可计算该城市公共交通系统评价指标到 1～5 级标准的综合距离，见表 8-4。

表 8-4　综合距离

r	$d(1,1,W)$	$d(2,1,W)$	$d(3,1,W)$	$d(4,1,W)$	$d(5,1,W)$
计算值	5.387	5.412	5.283	6.073	5.981

步骤 4　由表 8-4 中的计算值可知，5 个计算值中的最小值为 5.283，依据等级配置原则，该城市公共交通系统的评价等级为“{三级|中等}”。

因此可认为该城市公共交通系统基本合理，处于可持续发展水平，但在未来规划发展中还应重点加强、完善城市公共交通系统，提高整个城市公共交通系统可持续发展水平，加速城市公共交通系统的智能化、信息化发展，促进整个城市交通的协调发展。所以通过对城市公共交通系统评价的研究，一方面可以找出城市公共交通发展存在的主要问题，研究如何促使城市公共交通成为带动城市社会经济向良态发展的主要手段，并给城市交通发展指明方向；另一方面将为决策部门提供决策依据，为经营部门提供经营策略，为乘客宣传公共交通的优势以便吸引客源。

总之，实例分析表明，将二元区间理想点法用于城市公共交通系统的综合评价是可行的。该法概念明确、便于计算，而且评定结果具有明确的实际意义，在城市交通评价领域中具有良好的应用前景。对进一步发展公共交通系统，改善城市的现有交通状况有实际的应用价值。

第9章　基于二元区间数的高速公路交通安全综合评价

针对高速公路交通安全问题,利用不确定性数学中的区间数理论进行了研究。在对影响高速公路安全的因素进行综合分析的基础上,构建高速公路交通安全评价的指标体系。利用[0,1]区间理论,在将评价指标量化处理的基础上,依据不确定性数学中的模糊评判原理,在定义模糊区间运算的情况下,依据二元区间数的运算关系,建立高速公路交通安全的区间评价模型。并利用它对某省现有高速公路安全进行了研究。

9.1　高速公路交通安全的描述

高速公路交通安全的评价是对高速公路的道路条件、交通安全措施、交通管理设施和服务水平等方面做出相对满意度的综合判断,并及时掌握道路交通安全问题演化内在规律,从技术管理及行政管理层面上指导交通安全管理政策、措施制定的重要途径。目前,对高速公路交通安全评价较多采用路面条件、交通隔离、防护设施、监控设施、拥挤度、事故率、隧道设施等评价指标进行单一评价研究[83,84]。特别是许多学者进行这类高速公路交通安全评价时,往往使用定性的方法来实施评价,即以评价者的主观感觉来判断事物的优或劣,从而来评价高速公路交通安全系统的"好"与"坏"。因此,它存在明显的缺陷:一方面,评价结果不能够真实反映高速公路安全的实际情况,与实际情况相差较大;另一方面,评价依据不够科学,可比性差、误差大。由于高速公路交通安全系统的复杂性,以往模糊评价的结果是一个确定的数,但在实际情况中,我们认为用一个长度变化不大的区间去表示评价结果比用一个确定的数去表示评价结果要客观得多。这是因为区间数表示定性和定量评价相结合,集二者优点于一身。所以我们采用二元区间数理论对高速公路交通安全问题进行了评价研究。在依据高速公路自身特点的基础上,利用不确定性数学中的区间数理论知识,在定性分析和定量分析相结合的基础上,建立了高速公路交通安全的区间评价模型,并利用它对某地区现有高速公路交通安全进行综合评价。本章主要通过对高速公路交通安全状况的研究,从宏观角度对全国各省高速公路的交通安全现状做出评价,为有关部门制定交通安全工作及改进措施计划提供相关科学依据。

9.2　高速公路交通安全评价指标体系

9.2.1　评价指标筛选原则

高速公路交通安全的评价指标体系应该能够独立反映高速公路的某一具体方面的特征，并与其他特征相联系。评价指标的正确选择，必须通过对交通安全系统进行正确的分析，所选指标应该能够最大限度地客观反映各种影响。评价指标的数量应该越少越好，而且每一评价指标应该通过定量法获得或者可以用定性分级比较的方法获得。高速公路交通安全的评价指标体系同其他指标体系一样不可能包罗万象，所以在选取评价指标时必须遵循一些原则：代表性原则、简明性原则、客观性原则、可比性原则、综合性原则。

9.2.2　高速公路交通安全评价指标体系

为了反映最主要和较全面的信息，并使每个指标具有独立性、可量化和通用性，所以通过综合分析和考虑得到如下的评价指标体系（指标层为评价指标 u_1，u_2，…，u_{21}），见图 9-1。

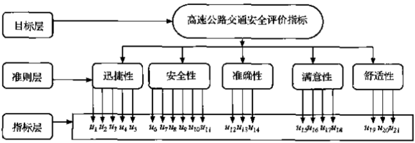


图 9-1　高速公路交通安全评价指标体系

图中，u_1 为路网连通度；u_2 为路网密度；u_3 为节点通达度；u_4 为路网车速；u_5 为路网流量；u_6 为视距；u_7 为交通隔离；u_8 为保护设施；u_9 为照明设施；u_{10} 为隧道设施；u_{11} 为监控设施；u_{12} 为引导设施；u_{13} 为信息设施；u_{14} 为气象情报设施；u_{15} 为道路线形条件；u_{16} 为路面状况；u_{17} 为事故率；u_{18} 为沿线景观；u_{19} 为里程饱和率；u_{20} 为拥挤度；u_{21} 为行车平稳度。

9.2.3　评价指标的检验

根据高速公路交通安全的评价指标体系筛选原则，结合图 9-1 中高速公路交通安全评价指标体系，参照国内外有关研究成果和有关专家的意见，作者设计了 3

个等级强弱标准来描述每个评价指标在每一筛选原则下的实用性程度。以“ + ”和“ − ”分别表示在每一筛选原则内，高速公路交通安全的 21 个评价指标在每一筛选原则中的强弱差别，见表 9-1。

表 9-1　高速公路交通安全指标评价

评价指标		代表性	简明性	客观性	可比性	综合性
u_1	路网连通度	+++	+−−	++−	+++	+++
u_2	路网密度	+++	+++	+++	+++	+++
u_3	节点通达度	++−	++−	++−	+++	+++
u_4	路网车速	++−	++−	+++	++−	+++
u_5	路网流量	+++	++−	+++	++−	+++
u_6	视距	++−	+−−	+++	+−−	++−
u_7	交通隔离	+++	++−	+++	+−−	++−
u_8	保护设施	+++	++−	++−	+−−	++−
u_9	照明设施	++−	++−	+++	+−−	++−
u_{10}	隧道设施	++−	++−	+++	+−−	++−
u_{11}	监控设施	+++	++−	+++	+−−	++−
u_{12}	引导设施	++−	++−	++−	+−−	++−
u_{13}	信息设施	++−	++−	++−	+−−	++−
u_{14}	气象情报设施	++−	+−−	++−	+−−	++−
u_{15}	道路线形条件	+−−	+−−	+−−	++−	++−
u_{16}	路面状况	+++	++−	++−	++−	++−
u_{17}	事故率	+++	+−−	++−	+++	+++
u_{18}	沿线景观	+−−	++−	+−−	+−−	++−
u_{19}	里程饱和率	++−	+−−	+−−	+−−	++−
u_{20}	拥挤度	++−	+−−	+−−	+−−	++−
u_{21}	行车平稳度	+−−	++−	+−−	+−−	++−

9.2.4　评价指标值的量化

评价指标根据其性质可分为两类：一类是定性指标，另一类是定量指标。一般定性指标由专家打分来获得测度值，而定量指标通过科学计算来获得测度值。但由于对定性指标的测度主观性比较大、定量指标取值的量纲不同等，在进行综合评价计算之前要对数据进行标准化处理，统一变化处理到[0,1]区间内。为了科学合

理地进行综合评价，本章采用一种新的方法对评价指标进行取值，使高速公路交通安全评价体系中的指标考察值都在[0,1]区间内，具有可公度性，见表 9-2。

表 9-2　指标的量化标准

准则层	指标层		测度方法	[0,1]区间界定				
迅捷性	u_1	路网连通度	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_2	路网密度	测度依据	非常低	低	一般	高	非常高
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_3	节点通达度	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_4	路网车速	测度依据	非常低	低	一般	高	非常高
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_5	路网流量	测度依据	非常低	低	一般	高	非常高
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
安全性	u_6	视距/m	测度依据	5 以上	5～10	10～15	15～20	20 以上
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_7	交通隔离	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_8	保护设施	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_9	照明设施	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{10}	隧道设施	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{11}	监控设施	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
准确性	u_{12}	引导设施	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{13}	信息设施	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{14}	气象情报设施	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]

续表

准则层	指标层		测度方法	[0,1]区间界定				
满意性	u_{15}	道路线形条件	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{16}	路面状况	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{17}	事故率/(次/年)	测度依据	4 以上	3～4	2～3	1～2	0
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{18}	沿线景观	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
舒适性	u_{19}	里程饱和率/%	测度依据	60 以上	60～70	70～80	80～90	90 以上
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{20}	拥挤度	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]
	u_{21}	行车平稳度	测度依据	非常差	差	一般	好	非常好
			测度值	[0,0.2]	[0.3,0.4]	[0.5,0.6]	[0.7,0.8]	[0.9,1]

[0,1]区间理论。为了克服评价指标测度值的量纲不同、单位不同、数量级不同、评价标准不同和计算方法不同等误差，使测度值具有可公度性，本章把评价结果界定在[0,1]区间内，并将评价结果界定为5个等级区间，即区间

$$[a_1,a_2],[a_3,a_4],[a_5,a_6],[a_7,a_8],[a_9,a_{10}]$$

这里 $a_i(i=1,2,3,\cdots,10)$ 满足

$$0\leqslant a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7<a_8<a_9<a_{10}\leqslant 1$$

9.3 高速公路交通安全的综合评价原理

9.3.1 基本定义

评价是一些归类的指标按照一定的规则和方法，对评价对象从某一方面或多方面或全面的综合状况做出优劣测定。高速公路交通安全评价就是应用不确定性数学中的模糊变换原理和最大隶属度原则，考虑与被评价对象的各个指标，在确定各个指标权重的基础上，对其所做的综合评价。由于描述模糊关系时，一般应用模糊矩阵，但模糊矩阵在刻画实际问题时往往会丢掉一些必要信息，从而使得模糊矩阵在描述模糊关系时，不很充分。因此，本章利用区间数理论采用二元区间向量来克服这一缺点。为了使计算过程科学合理、有可比性，先做如下

定义：

定义 9.1　称 $[\overrightarrow{A}] = ([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n])$ 为二元区间数向量，其中，$a_i,b_i \in [0,1]$ 且 $a_i \leqslant b_i (i=1,2,\cdots,n)$。

定义 9.2　二元区间数向量运算关系如下：

(1) 极值运算：

$$[a_1,a_2] \vee [b_1,b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2]$$

其中，$a_i \vee b_i = \max(a_i,b_i)(i=1,2)$。

$$[a_1,a_2] \wedge [b_1,b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2]$$

其中，$a_i \wedge b_i = \min(a_i,b_i)(i=1,2)$。

(2) 均值运算：

若 $B = ([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n])$，则均值

$$[B] = \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)$$

(3) 二元区间数向量运算：

$$([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_m,b_m]) \cdot \begin{bmatrix} [c_1,d_1] \\ [c_2,d_2] \\ \vdots \\ [c_m,d_m] \end{bmatrix}$$

$$= ([a_1c_1,b_1d_1] \vee [a_2c_2,b_2d_2] \vee \cdots \vee [a_mc_m,b_md_m])$$

9.3.2　二元区间数的综合评价

步骤 1　确定二元区间数向量。

根据具体情况，对评价对象，依据表 9-2 对图 9-1 中的高速公路交通安全评价指标取值，记为 $[a_i,b_i](i=1,2,3,\cdots,21)$，则二元区间数向量

$$[\overrightarrow{A}] = ([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_{21},b_{21}]) \tag{9-1}$$

步骤 2　确定评价指标的权重区间向量。

由于各指标在评价中所起的作用不同，所以根据各指标对评价对象所起作用的重要程度，本章利用五级标度法来确定评价指标的权重系数，把指标对评价对象的重要性划分为 5 个级别，见表 9-3。

表 9-3 属性级别

等 级	一 级	二 级	三 级	四 级	五 级
属 性	特别重要	极重要	较重要	重 要	一 般
取值范围	(0.9,1.0)	(0.8,0.9)	(0.7,0.8)	(0.6,0.7)	(0.5,0.6)

由于各评价指标在不同情况下所起的作用不同,所以它属于不同的属性区间级别。在高速公路交通安全评价中,结合实际情况就可以得到各评价指标的属性级别,然后根据属性级别的取值范围就可得到各评价指标 $u_i(i=1,2,\cdots,21)$ 的初始权重区间值

$$[\overline{Z}_i]=[c_i,d_i]$$

其中,$0.5<c_i<d_i<1,i=1,2,\cdots,21$。

为了减少评价指标权重取值的主观性,利用模糊数学中的模糊语言,将 z_i 模糊处理。处理后的 z_i 变为

$$[\overline{E}'_i]=[c'_i,d'_i]=\left([\overline{Z}_i]-[\overline{A}]\right)/\left([\overline{B}]-[\overline{A}]\right)$$

其中,二元区间数 $[\overline{A}]=[0.2,0.5]$;$[\overline{B}]=[0.5,0.8]$;$i=1,2,\cdots,21$。

为了使各指标权重区间满足归一化条件,再把各指标权重区间进行规范化处理,令

$$[\overline{E}_i]=[w_i,w'_i]=[\overline{E}'_i]/\left(\sum_{i=1}^{21}[\overline{E}'_i]\right) \tag{9-2}$$

其中,$i=1,2,\cdots,21$。

评价指标 $u_i(i=1,2,\cdots,21)$ 的权重区间 $[w_i,w'_i](i=1,2,\cdots,21)$,各指标权重区间向量

$$[\overrightarrow{W}]=([w_1,w'_1],[w_2,w'_2],\cdots,[w_{21},w'_{21}]) \tag{9-3}$$

步骤 3 确定评价区间。

依据因素区间向量 $[\overrightarrow{A}]=([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_{21},b_{21}])$ 和评价指标的权重区间向量 $[\overrightarrow{W}]$,就可以得到高速公路交通安全的二元区间数评价值

$$[\overline{R}][\overrightarrow{A}]\cdot[\overrightarrow{W}]^{\mathrm{T}} \tag{9-4}$$

步骤 4 评价标准。

评价集是评价者对评价对象可能做出的各种评价结果所组成的集合,用 V 表示,在高速公路交通安全评价中,取评价集合为 $V=\{$优秀|一级,良好|二级,中等|三级,一般|四级,差|五级$\}$,并赋予相应的区间数,见表 9-4。

根据 $[\bar{R}]$ 的值，依据模糊隶属度最大原则，就可以得到评价对象所属评价等级。

表 9-4　评价等级标准

评价等级		区间界定	备　注
一级	优秀	[0.8,1.0]	高速公路交通安全系统趋向有序结构，系统内各指标之间高度协调，可持续发展水平极高；各项设施和服务水平都达到很高层次；高速公路资源利用率高；交通监控和交通管理手段已经达到相当水平
二级	良好	[0.6,0.8]	高速公路交通安全系统各指标之间比较协调，可持续发展水平较高；各项设施和服务水平都达到较高层次；高速公路资源利用率较高；交通监控和交通管理手段已经达到一定水平
三级	中等	[0.4,0.6]	高速公路交通安全系统基本协调，可持续发展水平一般；各项设施和服务水平都达到一定层次；高速公路资源利用率适中；交通监控和交通管理手段有一定水平
四级	一般	[0.2,0.4]	高速公路交通安全系统各指标之间不太协调，可持续发展水平较差；各项设施和服务水平都不高；高速公路资源利用率低；交通监控和交通管理手段水平不高
五级	差	[0.0,0.2]	高速公路交通安全系统处于极不协调状态，高速公路系统结构极不合理，整个交通现状较混乱；系统处于不可持续发展，各项设施和服务水平都相当低；高速公路资源利用率相当低；交通监控和交通管理手段水平相当低

9.3.3　相应的措施

解决高速公路交通安全问题需要从各个方面综合治理，加强对高速公路使用者尤其是高速公路车辆驾驶员的安全教育，提高交通法规意识；提高车辆安全性能，保障车辆行驶安全；提高高速公路道路管理服务水平，加强管理力度，完善道路安全设施和行车条件等都是重要的环节。目前，应该以交通安全目标管理为导向，以现代科技为先导，以法规建设和充分的资金投入为保障，以实施最严格的管理措施为手段，采取特别措施将保障道路交通安全的 4 大措施——教育、工程、执法和急救统一规划，协调推进。在机动车保有量快速增加的条件下确保道路交通事故死亡人数逐年降低至管理目标值。

9.4　应用分析

为了对某地区现有高速公路交通安全进行合理的评价，交通部门组织有关专家在 2005 年 6 月 10 日至 2005 年 6 月 20 日对某地区高速公路进行了一次实地乘

客询问调查和考察，获得很多有关高速公路安全要素的有效数据，然后用上面提出的二元区间数对某地区现有高速公路安全总体水平做出综合评价。具体评价过程如下：

步骤 1 依据 2005 年考察得到的数据，可知该地区高速公路交通安全评价指标的因素向量为

$$[\overrightarrow{A}]=([0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.5,0.6],[0.5,0.6],[0.3,0.4],[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.5,0.6],[0.3,0.4],[0.3,0.4],[0.5,0.6],[0.7,0.8],[0.7,0.8],[0.7,0.8],[0.5,0.6],[0.5,0.6],[0.7,0.8])$$

步骤 2 由五级权重区间可知评价指标的权重区间向量为

$$[\overrightarrow{W}]=([0.6,0.7],[0.8,0.9],[0.5,0.6],[0.6,0.7],[0.7,0.8],[0.6,0.7],[0.5,0.6],[0.7,0.8],[0.6,0.7],[0.5,0.6],[0.7,0.8],[0.5,0.6],[0.6,0.7],[0.6,0.7],[0.6,0.7],[0.7,0.8],[0.6,0.7],[0.7,0.8],[0.7,0.8],[0.8,0.9],[0.7,0.8])$$

步骤 3 二元区间数的综合评价为

$$[\bar{R}]=[\overrightarrow{A}]\cdot[\overrightarrow{W}]^{\mathrm{T}}=[0.49,0.56]$$

步骤 4 确定等级为

$$[\bar{R}]=[0.49,0.56]\subset[0.4,0.6]$$

所以某地区现有高速公路交通安全的模糊区间评价结果为"三级"即"中等"。因此，认为某地区高速公路交通安全系统基本合理，处于基本可持续发展水平，但在未来的规划发展中还应重点加强、完善该地区高速公路交通安全系统，提高整个地区的高速公路交通安全可持续发展水平，加快高速公路交通安全系统的智能化、信息化发展，促进整个地区交通的协调发展。

总之，本章利用二元区间数对高速公路交通安全进行量化评价，将高速公路交通安全多目标评价问题转化为单目标评价问题进行了研究。该法使高速公路安全的评价问题变得简单易行。而且该法对进一步发展高速公路交通安全、改善高速公路交通安全具有重要的理想意义和实用价值。实际应用表明，将基于二元区间数的评价用于高速公路交通安全评价是可行的。该法概念明确、思路清晰、便于计算，而且综合评价结果真实、准确。

第二部分

三元区间数的基本理论

第 10 章　三元区间数的基础知识

多指标决策是按照某种决策准则，依据有关数学理论，对具有多个指标的有限方案进行选择和排序。但由于客观事物的复杂性和不确定性以及人类思维的模糊性和人类认识的有限性，人们往往不能明确地给出属性的信息量，所以在实际决策中，许多决策信息具有模糊性，导致决策者对属性评价很难用一个精确的数值描述出来，在这种情况下，我们提出用二元区间数表示属性的信息量。但是用二元区间数对多指标决策问题研究时，我们发现用一个二元区间数表示属性值的同时属性值偏好于二元区间内某个数，具有偏好信息。于是本章提出用三元区间数来表示决策者对属性决策的结果。

所以，考虑到人们认识、思维、感觉、推理等的模糊性和客观事物的复杂性，为了使多指标决策的结果更客观、更准确地反映所研究的问题，本章对三元区间数在模糊环境下进行了综合研究，并首次从理论上提出了三元区间数的基本理论。本章用三元区间数对多指标决策问题进行了深人研究，在保持区间决策基本信息的同时，考虑了决策者的偏好值。同时也详细研究了三元区间数的基本性质、运算关系以及排序指标等，从而为三元区间数理论发展提供了新思路，也为解决多属性决策问题提供了新途径。

10.1　三元区间数的基本定义

由于二元区间数只用大元、小元来表示，所以，在二元区间数中，大元、小元间的各个数值可以认为取值机会均等。但用二元区间数表示一个参量时，经常出现信息偏好现象，有时为了覆盖整个取值范围，区间可能会取得过大，即二元区间数的宽度过大，这时如果再认为整个区间内取值机会均等，得出的结果就会出现大的误差[53,85]。为了解决这个问题，我们对模糊环境下的区间数进行了拓展，提出了三元区间数理论。本章在给出了三元区间数基本定义的基础上，讨论了三元区间数的基本性质、运算关系及排序指标等。

10.1.1　三元区间数的界定

定义 10.1　三元区间数是用 3 个参数来表示一个区间数，记为

$$[\bar{A}]=[a^-,a^*,a^+],\quad a^-\leqslant a^*\leqslant a^+$$

其中，a^- 表示区间的下限，称为三元区间数的小元；a^+ 表示区间的上限，称为三元区间数的大元；a^* 表示在此区间中取值可能性最大的数，即信息偏好值，称为三元区间数的特元。

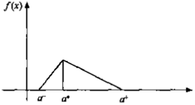


图 10-1 三元区间数

(1) 在三元区间数中，特元 a^* 的取值机会最大，即偏好信息值 a^* 在区间里面出现概率最大。而由 a^* 向上限的大元 a^+ 或向下限的小元 a^- 取值的概率都在递减。对于三元区间数可以用分布函数的形式表示其在区间取值机会的大小，见图 10-1[55]。

由图 10-1 可知，三元区间数满足

$$\int_{a^-}^{a^+} f(x)\mathrm{d}x = 1, \quad f_{\max} = f(a^*) \tag{10-1}$$

(2) 由于在实际应用中，建立切合实际情况的隶属函数是解决三元区间数量化问题的关键。目前已有一套确定隶属函数的方法，如三分法与增量法、模糊统计法、择优比较法、绝对比较法、集值统计迭代法等。一方面，从主观上凭丰富的经验和对事物的透彻认识来构建隶属函数，其结果具有一定的主观随意性；另一方面，从客观上由于人们认识事物的局限性，所建立的隶属函数也只能是近似的、大致的，其结果与实际有一定的差异性。所以，通过综合分析，构造出的同一个模糊集的隶属函数也不是唯一的。但由于模糊性是客观存在的，所以隶属函数是客观规律的反映，绝不能主观地任意捏造。本章构建三元区间数的隶属函数

$$\mu_{[\bar{A}]}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a^- \\ [x-a^-]\cdot[a^*-a^-]^{-1}, & a^- < x \leqslant a^* \\ [x-a^+]\cdot[a^*-a^+]^{-1}, & a^* < x \leqslant a^+ \\ 0, & x > a^+ \end{cases} \tag{10-2}$$

① 当 $a^- < a^* = a^+$ 时，有

$$\mu_{[\bar{A}]}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a^- \\ [x-a^-]\cdot[a^*-a^-]^{-1}, & a^- < x \leqslant a^* = a^+ \\ 0, & x > a^+ \end{cases}$$

② 当 $a^- = a^* = a^+$ 时，有

$$\mu_{[\bar{A}]}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a^- \\ 1, & a^- = x = a^* = a^+ \\ 0, & x > a^+ \end{cases}$$

③ 当 $a^- = a^* < a^+$ 时，有

$$\mu_{[\bar{A}]}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a^- \\ [a^+-x]\cdot[a^+-a^*]^{-1}, & a^- = a^* < x \leqslant a^+ \\ 0, & x > a^+ \end{cases}$$

(3) 设 $[\bar{\bar{A}}]$,$[\bar{\bar{B}}]$,$[\bar{\bar{C}}]$ 为 3 个三元区间数,则有下列性质:

① $[\bar{\bar{A}}]\pm[\bar{\bar{B}}]=[\bar{\bar{B}}]\pm[\bar{\bar{A}}]$;

② $[\bar{\bar{A}}]\cdot[\bar{\bar{B}}]=[\bar{\bar{B}}]\cdot[\bar{\bar{A}}]$;

③ $([\bar{\bar{A}}]\cdot[\bar{\bar{B}}])\cdot[\bar{\bar{C}}]=[\bar{\bar{A}}]\cdot([\bar{\bar{B}}]\cdot[\bar{\bar{C}}])$;

④ $([\bar{\bar{A}}]+[\bar{\bar{B}}])+[\bar{\bar{C}}]=[\bar{\bar{A}}]+([\bar{\bar{B}}]+[\bar{\bar{C}}])$;

⑤ $([\bar{\bar{A}}]+[\bar{\bar{B}}])\cdot[\bar{\bar{C}}]=([\bar{\bar{A}}]\cdot[\bar{\bar{C}}])+([\bar{\bar{B}}]\cdot[\bar{\bar{C}}])$。

10.1.2　三元区间数的相关内涵界定

定义 10.2　设$\prec$是 $I(\mathbf{R})$ (全体三元区间数的集合)上的一个二元关系,如果$\prec$满足下面 6 条性质,则称$\prec$为 $I(\mathbf{R})$ 上的一种序关系。

(1) 自反性: $[\bar{\bar{A}}]\prec[\bar{\bar{A}}]$。

(2) 传递性: 若 $[\bar{\bar{A}}]\prec[\bar{\bar{B}}]$ 且 $[\bar{\bar{B}}]\prec[\bar{\bar{C}}]$, 则 $[\bar{\bar{A}}]\prec[\bar{\bar{C}}]$。

(3) 完全性: 对任意的 $[\bar{\bar{A}}]$,$[\bar{\bar{B}}]\in I(\mathbf{R})$, 一定有 $[\bar{\bar{A}}]\prec[\bar{\bar{B}}]$ 或者 $[\bar{\bar{B}}]\prec[\bar{\bar{A}}]$。

(4) 分离性: 若 $a^-<b^-$, 则 $[\bar{\bar{A}}]\prec[\bar{\bar{B}}]$。

(5) 相容性: 若 $[\bar{\bar{A}}]\prec[\bar{\bar{B}}]$, 则当 $[\bar{\bar{A}}]$,$[\bar{\bar{B}}]\in I(\mathbf{R})$ 时,一定有 $[\bar{\bar{A}}]\leqslant[\bar{\bar{B}}]$。

(6) 线性性: 若 $[\bar{\bar{A}}]\prec[\bar{\bar{B}}]$, 则对任意的 $[\bar{\bar{C}}]\in I(\mathbf{R})$ 及实数 $k\geqslant 0$, 一定有

$$[\bar{\bar{A}}]+[\bar{\bar{C}}]\prec[\bar{\bar{B}}]+[\bar{\bar{C}}],\quad k[\bar{\bar{A}}]\prec k[\bar{\bar{B}}]$$

定义 10.3　设 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 为三元区间数,则

(1) 若 $a^-\geqslant 0$, 称 $[\bar{\bar{A}}]$ 为非负三元区间数,特别当 $a^->0$ 时,称 $[\bar{\bar{A}}]$ 为正三元区间数。

(2) 若 $a^+\leqslant 0$, 称 $[\bar{\bar{A}}]$ 为非正三元区间数,特别当 $a^+<0$ 时,称 $[\bar{\bar{A}}]$ 为负三元区间数。

(3) 若 $a^-<0$ 且 $a^+>0$, 称 $[\bar{\bar{A}}]$ 为异三元区间数。

(4) 若 $a^- = a^*$ 或 $a^* = a^+$，三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]$ 退化为二元区间数 $[\bar{A}]$，特别当 $a^- = a^* = a^+$ 时，三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]$ 退化为普通实数 A。

定义 10.4　设有两个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，则有

(1) $[\bar{\bar{A}}]>[\bar{\bar{B}}]$，当且仅当 $a^->b^-,a^*>b^*,a^+>b^+$。

(2) $[\bar{\bar{A}}]=[\bar{\bar{B}}]$，当且仅当 $a^-=b^-,a^*=b^*,a^+=b^+$。

(3) $[\bar{\bar{A}}]<[\bar{\bar{B}}]$，当且仅当 $a^-<b^-,a^*<b^*,a^+<b^+$。

定义 10.5　设有两个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，则三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]$，$[\bar{\bar{B}}]$ 间的距离

$$\rho([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(a^--b^-)^2+(a^*-b^*)^2+(a^+-b^+)^2} \tag{10-3}$$

对任意 3 个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]$，$[\bar{\bar{B}}]$，$[\bar{\bar{C}}]$，有如下性质：

(1) $\rho([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])\geqslant 0$。

(2) $\rho([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])=\rho([\bar{\bar{B}}],[\bar{\bar{A}}])$。

(3) $\rho([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])=0\Leftrightarrow[\bar{\bar{A}}]=[\bar{\bar{B}}]$。

(4) $\rho([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])\leqslant\rho([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{C}}])+\rho([\bar{\bar{B}}],[\bar{\bar{C}}])$。

定义 10.6　设三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，且记

$$l_{[\bar{\bar{A}}]}=a^+-a^-,\quad l_{[\bar{\bar{B}}]}=b^+-b^-$$

则称

$$P([\bar{\bar{A}}]\geqslant[\bar{\bar{B}}])=\frac{\max\{0,|l_{[\bar{\bar{A}}]}-l_{[\bar{\bar{B}}]}|,|a^*-b^*|\}}{l_{[\bar{\bar{A}}]}+l_{[\bar{\bar{B}}]}} \tag{10-4}$$

为三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]\geqslant[\bar{\bar{B}}]$ 的可能度。

定义 10.7　设三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，令

$$m([\bar{\bar{A}}])=\frac{1}{2}[a^-+a^+],\quad m([\bar{\bar{B}}])=\frac{1}{2}[b^-+b^+]$$

$$w([\bar{\bar{A}}])=\frac{1}{2}[a^+-a^-],\quad w([\bar{\bar{B}}])=\frac{1}{2}[b^+-b^-]$$

则称

$$\lambda = \max\left\{\frac{m([\bar{\bar{B}}]) - m([\bar{\bar{A}}])}{w([\bar{\bar{B}}]) - w([\bar{\bar{A}}])}, \frac{m([\bar{\bar{B}}]) - b^*}{m([\bar{\bar{A}}]) - a^*}\right\} \tag{10-5}$$

为三元区间数的可接受度。

定义 10.8　对于三元区间数 $[\bar{\bar{A}}_i] = [a_i^-, a_i^*, a_i^+]$，则称

$$f_{[\bar{\bar{A}}]}(x) = a^* + (a^+ - a^-)x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{10-6}$$

为三元区间数的排序函数。

定义 10.9　对于三元区间数 $[\bar{\bar{A}}_i] = [a_i^-, a_i^*, a_i^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}_i] = [b_i^-, b_i^*, b_i^+]$，及 $0 \leqslant x \leqslant 1$，则

(1) 三元区间数的排序函数 $f_{[\bar{\bar{A}}]}(x) < f_{[\bar{\bar{B}}]}(x)$，称 $[\bar{\bar{A}}_i] = [a_i^-, a_i^*, a_i^+]$ 小于 $[\bar{\bar{B}}_i] = [b_i^-, b_i^*, b_i^+]$，记为 $[\bar{\bar{A}}] < [\bar{\bar{B}}]$。

(2) 若三元区间数的排序函数 $f_{[\bar{\bar{A}}]}(x) > f_{[\bar{\bar{B}}]}(x)$，称 $[\bar{\bar{A}}_i] = [a_i^-, a_i^*, a_i^+]$ 大于 $[\bar{\bar{B}}_i] = [b_i^-, b_i^*, b_i^+]$，记为 $[\bar{\bar{A}}] > [\bar{\bar{B}}]$。

(3) 三元区间数的排序函数 $f_{[\bar{\bar{A}}]}(x) = f_{[\bar{\bar{B}}]}(x)$，称 $[\bar{\bar{A}}_i] = [a_i^-, a_i^*, a_i^+]$ 等于 $[\bar{\bar{B}}_i] = [b_i^-, b_i^*, b_i^+]$，记为 $[\bar{\bar{A}}] = [\bar{\bar{B}}]$。

定义 10.10　设任意三元区间数 $[\bar{\bar{A}}_i] = [a_i^-, a_i^*, a_i^+]$ 和三元区间数 $[\bar{\bar{B}}_i] = [b_i^-, b_i^*, b_i^+]$，且集合 $\{x \mid f_{[\bar{\bar{A}}]}(x) > f_{[\bar{\bar{B}}]}(x)\}$ 非空，令

$$x_0 = \inf\{x \mid f_{[\bar{\bar{A}}]}(x) > f_{[\bar{\bar{B}}]}(x)\} \tag{10-7}$$

则称 $\delta = 1 - x_0$ 为 $[\bar{\bar{A}}_i] = [a_i^-, a_i^*, a_i^+]$ 大于 $[\bar{\bar{B}}_i] = [b_i^-, b_i^*, b_i^+]$ 的可信度。

10.2　三元区间数的基本运算

10.2.1　三元区间数的初级运算

设有两个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}] = [a^-, a^*, a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}] = [b^-, b^*, b^+]$，则

(1) 加法运算：

$$[a^-, a^*, a^+] + [b^-, b^*, b^+] = [a^- + b^-, a^* + b^*, a^+ + b^+]$$

(2) 减法运算:

$$[a^-,a^*,a^+]-[b^-,b^*,b^+]=[a^- - b^-,a^* - b^*,a^+ - b^+]$$

(3) 乘法运算:

$$[a^-,a^*,a^+]\cdot[b^-,b^*,b^+]=[a^- b^-,a^* b^*,a^+ b^+]$$

(4) 除法运算:

$$[a^-,a^*,a^+]/[b^-,b^*,b^+]=[a^- /b^+,a^* /b^*,a^+ /b^-],\quad b^- > 0$$

(5) 倍数运算:

① 当 $k\geqslant 0$ 时, $k[a^-,a^*,a^+]=[ka^-,ka^*,ka^+]$;

② 当 $k<0$ 时, $k[a^-,a^*,a^+]=[ka^+,ka^*,ka^-]$。

(6) 极值运算:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}[a_i^-,a_i^*,a_i^+]=\left[\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^-,\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^*,\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^+\right]$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}[a_i^-,a_i^*,a_i^+]=\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^-,\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^*,\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_i^+\right]$$

(7) 指数运算:

$$c^{[\bar{\bar{A}}]}=[c^{a^-},c^{a^*},c^{a^+}]$$

其中, c 为正实数。

(8) 幂次运算:

$$[a^-,a^*,a^+]^n=[(a^-)^n,(a^*)^n,(a^+)^n]$$

其中, $a\geqslant 0$; n 为正实数。

(9) 距离运算:

$$d_1=d([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])=\sqrt{(a^- - b^-)^2+(a^* - b^*)^2+(a^+ - b^+)^2}$$

$$d_2=d([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])=\max\{|a^- - b^-|,|a^* - b^*|,|a^+ - b^+|\}$$

(10) 范数运算:

设 $X=([a_1^-,a_1^*,a_1^+],[a_2^-,a_2^*,a_2^+],\cdots,[a_n^-,a_n^*,a_n^+])$ 是任意三元区间数列向量,则称 $\|X\|=\max\{|a_1^+|,|a_2^+|,\cdots,|a_n^+|\}$ 为三元区间数列 X 的范数。

(11) 对数运算:

当 $a^- > 0$ 时,则

$$\ln[\bar{\bar{A}}]=\ln[a^-,a^*,a^+]=[\ln a^-,\ln a^*,\ln a^+]$$

(12) 平均三元区间数:

设 $[\bar{\bar{A}}_1]=[a_1^-,a_1^*,a_1^+]$, $[\bar{\bar{A}}_2]=[a_2^-,a_2^*,a_2^+]$, $\cdots$, $[\bar{\bar{A}}_n]=[a_n^-,a_n^*,a_n^+]$, 则平均三元区间数

$$\mathrm{Ave}[\bar{\bar{A}}]=\left[\frac{a_1^-+a_2^-+\cdots+a_n^-}{n},\frac{a_1^*+a_2^*+\cdots+a_n^*}{n},\frac{a_1^++a_2^++\cdots+a_n^+}{n}\right]$$

(13) 三元区间数的模：

$$\left|[\bar{\bar{A}}]\right|=\sqrt{(a^-)^2+(a^*)^2+(a^+)^2}$$

10.2.2　三元区间数的高级运算

1. 三元区间数的级数

定义 10.11　设三元区间数的数列 $[\bar{\bar{A}}_1]=[a_1^-,a_1^*,a_1^+]$，$[\bar{\bar{A}}_2]=[a_2^-,a_2^*,a_2^+]$，…，$[\bar{\bar{A}}_i]=[a_i^-,a_i^*,a_i^+]$，…，则称 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}[\bar{\bar{A}}_i]=[\bar{\bar{A}}_1]+[\bar{\bar{A}}_2]+\cdots+[\bar{\bar{A}}_i]+\cdots$ 为三元区间数的级数，记为

$$\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{\bar{A}}_i]=\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^-,a_i^*,a_i^+]=\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+\right]\tag{10-8}$$

定义 10.12　设 $\{[\bar{\bar{X}}_n]=[x_n^-,x_n^*,x_n^+]\}$ 为三元区间数序列，$[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 为一个三元区间数。若任意 $\epsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $\rho([\bar{\bar{X}}_n],[\bar{\bar{B}}])<\epsilon$ 成立，则称 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 为三元区间数的序列 $\{[\bar{\bar{X}}_n]\}$ 趋于无穷时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}[\bar{\bar{X}}_n]=[\bar{\bar{A}}]\tag{10-9}$$

三元区间数的序列有如下性质：

定理 10.1　如果 $\{[\bar{\bar{X}}_n]=[x_n^-,x_n^*,x_n^+]\}$ 为三元区间数序列，$[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 为一个三元区间数，则

$$\lim_{n\to\infty}[\bar{\bar{X}}_n]=[\bar{\bar{A}}]\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}x_n^-=a^-\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^*=a^*\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^+=a^+\end{cases}$$

证明略(与《高等数学》里面极限证明同法)。

定理 10.2　设 $\{[\bar{\bar{X}}_n]\}$ 为三元区间数序列，若 $\{[\bar{\bar{X}}_n]\}$ 有极限，则极限唯一。证明略(与《高等数学》里面极限证明同法)。

定理 10.3　记 $\lim\limits_{n\to\infty}[\bar{\bar{X}}_n]=[\bar{\bar{A}}]$，$\lim\limits_{n\to\infty}[\bar{\bar{Y}}_n]=[\bar{\bar{B}}]$，则

$$\lim_{n\to\infty}([\bar{\bar{A}}_n]\pm[\bar{\bar{B}}_n])=\lim_{n\to\infty}[\bar{\bar{X}}_n]\pm\lim_{n\to\infty}[\bar{\bar{Y}}_n]=[\bar{\bar{A}}]\pm[\bar{\bar{B}}]$$

$$\lim_{n\to\infty}([\bar{\bar{A}}_n]\cdot[\bar{\bar{B}}_n])=\lim_{n\to\infty}[\bar{\bar{X}}_n]\cdot\lim_{n\to\infty}[\bar{\bar{Y}}_n]=[\bar{\bar{A}}]\cdot[\bar{\bar{B}}]$$

$$\lim_{n\to\infty}([\bar{\bar{A}}_n]/[\bar{\bar{B}}_n])=\lim_{n\to\infty}[\bar{\bar{X}}_n]/\lim_{n\to\infty}[\bar{\bar{Y}}_n]=[\bar{\bar{A}}]/[\bar{\bar{B}}]$$

定义 10.13 记 $s_i^-=\sum_{k=1}^{i}a_k^-,s_i^*=\sum_{k=1}^{i}a_k^*,s_i^+=\sum_{k=1}^{i}a_k^+$，对于三元区间数的级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{\bar{A}}_i]=\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^-,a_i^*,a_i^+]=\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+\right] \tag{10-10}$$

定理 10.4 若极限 $\min_{i\to\infty}s_i^-=a^-,\min_{i\to\infty}s_i^*=a^*,\min_{i\to\infty}s_i^+=a^+$ 都存在，则称三元区间数的级数收敛，其和为 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$，如果上述两个极限至少有一个不存在，则称三元区间数的级数发散。

性质 10.1 如果三元区间数的级数 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{\bar{A}}_i]=\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^-,a_i^*,a_i^+]=\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+\right]$ 收敛于和 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$，$k$ 是一个不为 0 的常数，则级数 $k\cdot\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{\bar{A}}_i]$ 收敛于

$$k[\bar{\bar{A}}]=[ka^-,ka^*,ka^+] \tag{10-11}$$

性质 10.2 如果三元区间数的级数 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{\bar{A}}_i]=\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^-,a_i^*,a_i^+]=\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+\right]$ 收敛，则有

$$\min_{i\to\infty}a_i^-=0,\quad \min_{i\to\infty}a_i^*=0,\quad \min_{i\to\infty}a_i^+=0 \tag{10-12}$$

性质 10.3 如果两个收敛的三元区间数的级数 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{\bar{A}}_i]=[\bar{\bar{A}}]$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty}[\bar{\bar{B}}_i]=[\bar{\bar{B}}]$，其逐项相加减的级数收敛，且

$$\sum_{i=1}^{\infty}([\bar{\bar{A}}_i]+[\bar{\bar{B}}_i])=[\bar{\bar{A}}]+[\bar{\bar{B}}] \tag{10-13}$$

2. 三元区间数的积分

定义 10.14 设 $[\bar{\bar{F}}(x)]=[f(x)^-,f(x)^*,f(x)^+]$，其中 $f(x)^-$、$f(x)^*$ 和

$f(x)^+$ 均为实值函数，且对任意 $x \in \mathbf{R}$，有 $f(x)^- \leqslant f(x)^* \leqslant f(x)^+$，称 $[\bar{\bar{F}}(x)]=[f(x)^-, f(x)^*, f(x)^+]$ 为三元区间数的函数。

定义 10.15　设三元区间数的函数 $[\bar{\bar{F}}(x)]=[f(x)^-, f(x)^*, f(x)^+]$ 是 $D \subset \mathbf{R}$ 上的三元区间数函数，若 $f(x)^-$、$f(x)^*$ 和 $f(x)^+$ 在 $D \subset \mathbf{R}$ 上可积(黎曼意义下的)，则三元区间数的函数

$$[\bar{\bar{F}}(x)]=[f(x)^-, f(x)^*, f(x)^+] \tag{10-14}$$

在 $D \subset \mathbf{R}$ 上可积，其积分值

$$\int_D [\bar{\bar{F}}(x)]\mathrm{d}x = \left[\int_D f(x)^- \,\mathrm{d}x, \int_D f(x)^* \,\mathrm{d}x, \int_D f(x)^+ \,\mathrm{d}x\right] \tag{10-15}$$

性质 10.4　若函数 $[\bar{\bar{F}}(x)]=[f(x)^-, f(x)^*, f(x)^+]$ 和 $[\bar{\bar{G}}(x)]=[g(x)^-, g(x)^*, g(x)^+]$ 均在 $D \subset \mathbf{R}$ 上可积，则

(1) $[\bar{\bar{F}}(x)] \pm [\bar{\bar{G}}(x)]$ 在 $D \subset \mathbf{R}$ 上可积，且

$$\int_D ([\bar{\bar{F}}(x)] \pm [\bar{\bar{G}}(x)])\mathrm{d}x$$
$$= \left[\int_D (f(x)^- \pm g(x)^-)\mathrm{d}x, \int_D (f(x)^* \pm g(x)^*)\mathrm{d}x, \int_D (f(x)^+ \pm g(x)^-)\mathrm{d}x\right] \tag{10-16}$$

(2) k 是常数，则收敛于 $k[\bar{\bar{F}}(x)]$ 在 $D \subset \mathbf{R}$ 上可积，且

$$\int_D k \cdot [\bar{\bar{F}}(x)]\mathrm{d}x = k\int_D [\bar{\bar{F}}(x)]\mathrm{d}x \tag{10-17}$$

(3) 若在 $D \subset \mathbf{R}$ 上有 $[\bar{\bar{F}}(x)] \subseteq [\bar{\bar{G}}(x)]$，则

$$\int_D [\bar{\bar{F}}(x)]\mathrm{d}x \subseteq \int_D [\bar{\bar{G}}(x)]\mathrm{d}x \tag{10-18}$$

(4) 若三元区间数的函数 $[\bar{\bar{F}}(x)]=[f(x)^-, f(x)^*, f(x)^+]$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $a<c<b$，则

$$\int_a^c [\bar{\bar{F}}(x)]\mathrm{d}x + \int_c^b [\bar{\bar{F}}(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b [\bar{\bar{F}}(x)]\mathrm{d}x \tag{10-19}$$

3. 三元区间数的方程组

定义 10.16　设三元区间数 $[\bar{\bar{A}}_i]=[a_i^-, a_i^*, a_i^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}_i]=[b_i^-, b_i^*, b_i^+]$，其中 a_i^-、a_i^*、a_i^+、b_i^-、b_i^*、$b_i^+ \in \mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{cases}[\bar{\bar{A}}_{11}]x_1+[\bar{\bar{A}}_{12}]x_2+\cdots+[\bar{\bar{A}}_{1n}]x_n=[\bar{\bar{B}}_1]\\ [\bar{\bar{A}}_{21}]x_1+[\bar{\bar{A}}_{22}]x_2+\cdots+[\bar{\bar{A}}_{2n}]x_n=[\bar{\bar{B}}_2]\\ \qquad\vdots\\ [\bar{\bar{A}}_{n1}]x_1+[\bar{\bar{A}}_{n2}]x_2+\cdots+[\bar{\bar{A}}_{nn}]x_n=[\bar{\bar{B}}_n]\end{cases}\tag{10-20}$$

称为含三元区间数的非齐次项线性方程组。记

$$[\tilde{\tilde{A}}]=\begin{bmatrix}[\bar{\bar{A}}_{11}] & [\bar{\bar{A}}_{12}] & \cdots & [\bar{\bar{A}}_{1n}]\\ [\bar{\bar{A}}_{21}] & [\bar{\bar{A}}_{22}] & \cdots & [\bar{\bar{A}}_{2n}]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [\bar{\bar{A}}_{n1}] & [\bar{\bar{A}}_{n2}] & \cdots & [\bar{\bar{A}}_{nn}]\end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\tilde{B}}]=\begin{bmatrix}[\bar{\bar{B}}_1]\\ [\bar{\bar{B}}_2]\\ \vdots\\ [\bar{\bar{B}}_n]\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

式(10-20)可写为 $[\tilde{\tilde{A}}]X=[\tilde{\tilde{B}}]$。

总之，本章在从理论上界定了三元区间数基本定义的基础上，研究了三元区间数的基本性质、基本运算关系(包括初级运算和高级运算)和排序指标等。从理论上丰富了区间数理论的内容，特别是三元区间数高级运算的研究，具有一定的新颖性，为后续章节三元区间数的实际应用提供了理论支持，也为不确定性数学理论的研究提供了新的思路和途径。

第 11 章　基于三元区间数的灰色关联决策模型

针对一类权重未知的多属性决策问题，利用三元区间数理论进行了研究。依据三元区间数的基本运算和排序关系，本章构建了一种基于三元区间数和信息度的灰色关联度决策模型。该模型在利用信息熵确定各决策指标权重系数的基础上，依据三元区间数中的参考数列，提出决策矩阵为三元区间数的灰色关联决策模型。最后依据关联度的大小对决策方案进行排序和择优。应用分析表明该决策模型计算过程简单、所需信息量少。

11.1　问题描述

由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性，对于决策分析研究还不够完善和成熟。多属性决策是多目标决策的一种，它按照某种决策准则，对具有多个属性的有限方案进行选择和排序[6]。目前多属性决策问题的研究主要集中在两个不同研究方向：第一个是理论研究，主要从理论上探讨人们在决策过程中的行为机理，并建立定量的数学模型来解决决策问题；第二个是应用研究，主要研究实际决策问题，将实际问题简化成定量的数学问题（主要利用不确定性数学方法建立数学模型），以指导实际决策问题。但在实际的决策中，许多决策信息具有模糊性，导致决策者对方案属性值的判断很难用一个精确的数字表述出来，于是学者提出用三参数区间数来研究多属性决策问题[86]。由于决策信息的不确定性和模糊性，使得决策信息通常不是以数值点的形式表示，而是以区间数的形式表示。因此，用三元区间数来研究决策问题具有十分重要的理论意义和实际应用价值。

目前，由于各个领域的数据与信息量剧增，再加上客观条件的限制和主观能力有限，使得数据与信息的不精确、不确定、不完整和模糊性问题等更加突出、更为复杂[87,88]。因此，为了有效地处理不确定性问题，并从不同数据源中提取有效的、新颖的、潜在有用的信息，本章利用三元区间数来研究多属性决策问题，在将三元区间数运算进一步拓广的基础上，结合灰色系统的知识，将多指标决策问题转化成指标取值为三元区间数的多指标决策问题，并在利用熵权系数法求出各个决策指标的权重系数的基础上，提出了三元区间数的灰色关联度决策模型。

11.2 三元区间数的排序关系

由于主客观条件限制和随机元素的干扰，在数据获取时，人们得到的常常是数据的近似值，对象存在相似的多次取值，这些取值往往一时难以确定取舍。因此，信息系统中有时存在某些对象的少量属性值暂时无法确定，但可知其取值范围。为了解决这一问题，依据第 10 章的三元区间数的基本知识，本章对三元区间数的相关知识进行补充研究。

定义 11.1 设 $X=\{[a_1^-,a_1^*,a_1^+],[a_2^-,a_2^*,a_2^+],\cdots,[a_n^-,a_n^*,a_n^+]\}$ 为 n 维三元区间数列向量，则称

$$\|X\|=\max\{\max(|a_1^-|,|a_1^*|,|a_1^+|),\max(|a_2^-|,|a_2^*|,|a_2^+|),\cdots,\max(|a_n^-|,|a_n^*|,|a_n^+|)\}$$

为三元区间数列 X 的范数。

定义 11.2 设任意两个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，则称

$$\left|[\bar{\bar{A}}]-[\bar{\bar{B}}]\right|=\max(|a^- - b^-|,|a^* - b^*|,|a^+ - b^+|)$$

为三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$ 的距离。

11.2.1 三元区间数的次运算

设有两个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，则

(1) 倒数法则：

$$[a^-,a^*,a^+]^{-1}=[(a^+)^{-1},(a^*)^{-1},(a^-)^{-1}],\quad a^->0$$

(2) 对数法则：

$$\ln[a^-,a^*,a^+]=[\ln a^-,\ln a^*,\ln a^+],\quad a^->0$$

(3) 幂指法则：

$$\exp[a^-,a^*,a^+]=[\exp a^-,\exp a^*,\exp a^+]$$

11.2.2 三元区间数的次定义

定义 11.3 依据学者张兴芳提出的心态指标[35]，本章将其推广到三元区间数。设三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$，令

$$M([\overset{=}{A}])=\frac{1}{3}[a^{-}+a^{*}+a^{+}],\quad D([\overset{=}{A}])=\frac{1}{3}[a^{-}+a^{+}-a^{*}]$$

在 $[0,1]$ 上定义函数：$F_{[[\overset{=}{A}]]}(\lambda):[0,0.5,1]\to[a^{-},a^{*},a^{+}]$，即

$$F_{[[\overset{=}{A}]]}(\lambda)=M([\overset{=}{A}])+(3\lambda-1)D([\overset{=}{A}])$$

则称 λ 为决策者对的心态指标，显然 $F_{[[\overset{=}{A}]]}(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上的单调递增函数，而且

(1) 当 $\lambda=0$ 时，$F_{[[\overset{=}{A}]]}(\lambda)=\frac{2}{3}a^{*}$，称为决策者的下限指标。

(2) 当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，$F_{[[\overset{=}{A}]]}(\lambda)=\frac{2}{3}(a^{-}+a^{+})$，称为决策者的上限指标。

(3) 当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$F_{[[\overset{=}{A}]]}(\lambda)=\frac{1}{3}(a^{-}+a^{*}+a^{+})$，称为决策者的中限指标。

定义 11.4　设任意两个三元区间数 $[\overset{=}{A}]=[a^{-},a^{*},a^{+}]$ 和 $[\overset{=}{B}]=[b^{-},b^{*},b^{+}]$，则称

(1) 大元距离 $d_{u}([\overset{=}{A}],[\overset{=}{B}])=|a^{+}-b^{+}|$。

(2) 特元距离 $d_{*}([\overset{=}{A}],[\overset{=}{B}])=|a^{*}-b^{*}|$。

(3) 小元距离 $d_{l}([\overset{=}{A}],[\overset{=}{B}])=|a^{-}-b^{-}|$。

性质 11.1　$d_{u}([\overset{=}{A}],[\overset{=}{B}])\geqslant 0, d_{*}([\overset{=}{A}],[\overset{=}{B}])\geqslant 0, d_{l}([\overset{=}{A}],[\overset{=}{B}])\geqslant 0$。

定义 11.5　设任意两个三元区间数 $[\overset{=}{A}]=[a^{-},a^{*},a^{+}]$ 和 $[\overset{=}{B}]=[b^{-},b^{*},b^{+}]$，方程

(1) $[\overset{=}{A}]+x=[\overset{=}{B}]$ 的解 $x=[\overset{=}{B}]-[\overset{=}{A}]$。

(2) 当 $[\overset{=}{A}]=[a^{-},a^{*},a^{+}]$ 为正三元区间数时，$[\overset{=}{A}]x=[\overset{=}{B}]$ 的解 $x=[\overset{=}{B}]\cdot[\overset{=}{A}]^{-1}$，则称(1)(2)为三元区间数的方程。

11.3　基于三元区间数的灰色关联决策原理

灰色系统理论是一种研究少数据 贫信息不确定性问题的新方法，现已建立一

门具有相对完善理论体系的新兴交叉学科。灰色系统理论以部分信息已知、部分信息未知的小样本、贫信息、不确定的系统为研究对象，主要通过对部分已知信息的生成、开发，提取有价值的信息，实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控。由于人类的认知程度的模糊性和有限性，以及客观事物的复杂性，使得决策问题往往含有灰色不确定和未知不确定性。而灰色关联度分析可以对数据库中“贫信息”数据进行分析和挖掘，为解决灰色多方案多指标的决策问题提供新思路，所以本章建立基于三元区间数的灰色关联决策模型。

多指标决策问题描述，设有 n 个可行方案集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，m 个指标集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，指标集中 v_j 的权重 w_j 未知，但 $\sum_{j=1}^{m}w_j=1$。

对于方案 u_i 按第 j 个指标 v_j 进行测度，得到 u_i 关于 v_j 的属性值

$$[a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+],\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$$

则决策矩阵用三元区间数表示为 $([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times m}$。

11.3.1 决策矩阵的归一化

为了消除各指标间的不可公度性和统一各指标的趋势要求，对决策矩阵 $([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times m}$ 进行标准化处理，令

$$a_i^{-,\max}=\max\{a_{ij}^-\mid a_{ij}^-,j=1,2,\cdots,n\},\quad a_i^{-,\min}=\min\{a_{ij}^-\mid a_{ij}^-,j=1,2,\cdots,n\}$$

同理，可求得 $a_i^{*,\max},a_i^{*,\min},a_i^{u,\max},a_i^{u,\min}$，则各决策指标值归一化。

(1) 效益型：

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left[\frac{a_{ij}^-}{a_i^{+,\max}},\frac{a_{ij}^*}{a_i^{*,\max}},\frac{a_{ij}^+}{a_i^{-,\max}}\right]$$

(2) 成本型：

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left[\frac{a_i^{,\min}}{a_{ij}^-},\frac{a_i^{*,\min}}{a_{ij}^*},\frac{a_i^{+,\min}}{a_{ij}^+}\right]$$

处理后的标准化决策矩阵为

$$\begin{bmatrix}[r_{11}^-,r_{11}^*,r_{11}^+] & [r_{12}^-,r_{12}^*,r_{12}^+] & \cdots & [r_{1m}^-,r_{1m}^*,r_{1m}^+]\\ [r_{21}^-,r_{21}^*,r_{21}^+] & [r_{22}^-,r_{22}^*,r_{22}^+] & \cdots & [r_{2m}^-,r_{2m}^*,r_{2m}^+]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [r_{n1}^-,r_{n1}^*,r_{n1}^+] & [r_{n2}^-,r_{n2}^*,r_{n2}^+] & \cdots & [r_{nm}^-,r_{nm}^*,r_{nm}^+]\end{bmatrix}=([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+])_{n\times m}\quad(11\text{-}1)$$

11.3.2 决策矩阵的信息度

由于主客观条件限制和随机元素的干扰，决策者常常遇到信息不完全的问题，如元素信息不完全、结构信息不完全、边界信息不完全和运行行为信息不完全等。

为了解决这些问题，依据学者王美义提出的信息度原理[89]，本章将其推广到三元区间数领域，提出信息度的概念。

定义 11.6　三元区间数 $[a_{ij}^-, a_{ij}^*, a_{ij}^+]$ 的 φ 截集为

$$\varepsilon_{1ij}^{\varphi} = (a_{ij}^* - a_{ij}^-)\varphi + a_{ij}^-,\quad \varepsilon_{2ij}^{\varphi} = a_{ij}^+ - (a_{ij}^+ - a_{ij}^*)\varphi$$

其中，φ 在[0,1]取值。

决策者的信息度用 λ 表示，$\lambda \in [0,1]$，则

(1) 对于持下限决策者 $\lambda = 0$；

(2) 对于持上限决策者 $\lambda = 0.5$；

(3) 对于持中限决策者 $\lambda = 1$。

令属性值 $[a_{ij}^-, a_{ij}^*, a_{ij}^+]$ 的信息度[89]为

$$\pi_{\varphi ij}^{\lambda} = \lambda\,\varepsilon_{1ij}^{\varphi} + (1-\lambda)\varepsilon_{2ij}^{\varphi} \tag{11-2}$$

则决策方案 u_i 的信息度

$$\sigma_{\varphi ij}^{\lambda} = \frac{\pi_{\varphi ij}^{\lambda}}{\sum_{i=1}^{n} \pi_{\varphi ij}^{\lambda}},\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{11-3}$$

11.3.3　决策指标的权重系数

由于在实际应用中，人们常常需要对多属性决策问题中的每个决策指标，依据其相对重要程度，赋予权重系数。按照熵的思想，人们在决策中获得信息的多少和质量是决策的精度和可靠性大小的决定因素之一。因此，熵应用于不同决策过程，是一个很理想的尺度，同样，用熵还可以度量获取的数据所提供的有用信息量。

权重向量表示的是各影响因素在决策过程中所占的重要性程度，为了减少决策中的主观因素，本章用熵权系数法确定权重向量。因为，熵是物质系统状态的一个函数，也是系统的无序状态的量度。所以，令

$$h_j = -\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} f_{ij}\ln f_{ij},\quad j = 1,2,\cdots,m \tag{11-4}$$

其中，$f_{ij} = \sigma_{\varphi ij}^{\lambda}$。则在决策问题中，第 j 个决策指标的权重系数为

$$w_j = \frac{1 - h_j}{m - \sum_{j=1}^{m} H_j},\quad j = 1,2,\cdots,m \tag{11-5}$$

则标准化决策矩阵的加权标准决策矩阵为

$$([c_{ij}^-, c_{ij}^*, c_{ij}^+])_{n\times m} \tag{11-6}$$

其中，$[c_{ij}^-, c_{ij}^*, c_{ij}^+] = w_j \cdot [r_{ij}^-, r_{ij}^*, r_{ij}^+]$ $(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$。

11.3.4 参考数列的确定

灰色系统理论是通过对原始数据的整理来寻求其变化规律的，其中参考数列就是寻找数据的现实规律中的一种。所以，参考数列的元素应该由各可行方案的加权三元区间数标准化指标值的最优三元区间数组成，令

$$v_o^-(j)=\max_{1\leqslant i\leqslant n} c_{ij}^-,\quad v_o^*(j)=\max_{1\leqslant i\leqslant n} c_{ij}^*,\quad v_o^+(j)=\max_{1\leqslant i\leqslant n} c_{ij}^+$$

其中，$j=1,2,\cdots,n$。

参考数列

$$V_o=\{[v_o^-(1),v_o^*(1),v_o^+(1)],[v_o^-(2),v_o^*(2),v_o^+(2)],\cdots,[v_o^-(n),v_o^*(n),v_o^+(n)]\} \tag{11-7}$$

11.3.5 各可行方案关联系数的确定

令各可行方案属性指标基于三元区间数的加权标准化指标数列为

$$V_i=\{[c_{i1}^-,c_{i1}^*,c_{i1}^+],[c_{i2}^-,c_{i2}^*,c_{i2}^+],\cdots,[c_{in}^-,c_{in}^*,c_{in}^+]\}$$

则 V_i 与参考数列 V_o 的关联系数

$$[\bar{\bar{\xi}}_i(k)]=[\xi_i^-(k),\xi_i^*(k),\xi_i^+(k)]$$
$$=\frac{\min\limits_i\min\limits_k|[v_o^-(k),v_o^*(k),v_o^+(k)]-[c_{ik}^-,c_{ik}^*,c_{ik}^+]|+\rho\max\limits_i\max\limits_k|[v_o^-(k),v_o^*(k),v_o^+(k)]-[c_{ik}^-,c_{ik}^*,c_{ik}^+]|}{|[v_o^-(k),v_o^*(k),v_o^+(k)]-[c_{ik}^-,c_{ik}^*,c_{ik}^+]|+\rho\max\limits_i\max\limits_k|[v_o^-(k),v_o^*(k),v_o^+(k)]-[c_{ik}^-,c_{ik}^*,c_{ik}^+]|} \tag{11-8}$$

其中，ρ 为分辨系数，取值范围为[0,1]，通常取 $\rho=0.5$；$k=1,2,\cdots,m$。

11.3.6 关联度的确定

为了便于比较排序，将三元区间数 $[\bar{\bar{\xi}}_i(k)]=[\xi_i^-(k),\xi_i^*(k),\xi_i^+(k)]$ 转化为一个实数，令

$$\xi_i(k)=\frac{1}{3}[\xi_i^-(k)+\xi_i^*(k)+\xi_i^+(k)]$$

则第 i 个可行方案与参考数列 V_o 的关联度

$$t_i=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\xi_i(k),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{11-9}$$

11.3.7 最佳方案的确定

依据三元区间数的排序关系，将关联度 t_i 由大到小排序，最大关联度对应的可

行方案就是备选方案，即最优方案

$$t_i = \{t_i \mid \max t_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \tag{11-10}$$

因此，可行方案 u_i 是最优方案。

11.4　案例分析

2004 年根据某市现有公交线路网络，考虑到城市的发展，有关部门提出 5 种公交线网的优化调整方案，要求有关部门在这 5 种方案中选出一种最佳的优化方案。其中考察的指标有：乘客出行时间、线网覆盖率、乘客直达率、线网重复系数和线网日均满载率。5 种优化方案记为方案 1、方案 2、方案 3、方案 4 和方案 5。各方案对指标的考察值见表 11-1。

表 11-1　指标考察值

方案种类	线网日均满载率/%	线网覆盖率/%	线网重复系数/%	乘客直达率/%	乘客出行时间/min
方案 1	[0.5,0.6,0.7]	[0.63,0.65,0.7]	[0.26,0.28,0.32]	[0.61,0.63,0.65]	[10,12,15]
方案 2	[0.6,0.7,0.75]	[0.55,0.62,0.68]	[0.3,0.33,0.35]	[0.52,0.53,0.57]	[12,18,20]
方案 3	[0.55,0.6,0.65]	[0.58,0.63,0.69]	[0.28,0.32,0.34]	[0.53,0.54,0.55]	[20,22,25]
方案 4	[0.6,0.65,0.7]	[0.61,0.67,0.69]	[0.21,0.23,0.25]	[0.51,0.55,0.58]	[16,18,23]
方案 5	[0.55,0.65,0.75]	[0.65,0.68,0.7]	[0.2,0.25,0.27]	[0.52,0.53,0.56]	[15,17,22]

步骤 1　建立决策矩阵为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0.5,0.6,0.7] & [0.63,0.65,0.7] & [0.26,0.28,0.32] & [0.61,0.63,0.65] & [10,12,15] \\ [0.6,0.7,0.75] & [0.55,0.62,0.68] & [0.3,0.33,0.35] & [0.52,0.53,0.57] & [12,18,20] \\ [0.55,0.6,0.65] & [0.58,0.63,0.69] & [0.28,0.32,0.34] & [0.53,0.54,0.55] & [20,22,25] \\ [0.6,0.65,0.7] & [0.61,0.67,0.69] & [0.21,0.23,0.25] & [0.51,0.55,0.58] & [16,18,23] \\ [0.55,0.65,0.7] & [0.65,0.68,0.7] & [0.2,0.25,0.27] & [0.52,0.53,0.56] & [15,17,23] \end{bmatrix}$$

步骤 2　决策矩阵的归一化。

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} [0,0,0.5] & [0.8,0.5,1] & [0.3,0.4,0.5] & [1,1,1] & [1,1,1] \\ [1,1,1] & [0,0,0] & [0,0,0] & [0,0.1,0.2,] & [0.4,0.5,0.8] \\ [0,0,0.5] & [0.3,0.4,0.5] & [0.1,0.1,0.2] & [0,0.1,0.2] & [0,0,0] \\ [0.5,0.5,1] & [0.5,0.6,0.83] & [0.9,1,1] & [0,0.2,0.3] & [0.2,0.4,0.4] \\ [0.5,0.5,1] & [1,1,1] & [0.8,0.8,1] & [0,0.1,0.1] & [0.3,0.3,0.5] \end{bmatrix}$$

步骤 3　确定权重向量。

由式(11-5)知

$$W = (0.17, 0.21, 0.16, 0.22, 0.24)$$

步骤 4　确定加权标准决策矩阵。

由式(11-6)可知

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} [0,0,0.95] & [0.105,0.144,0.22] & [0.056,0.057,0.08] & [0.19,0.22,0.25] & [0.21,0.24,0.27] \\ [0.15,0.17,0.19] & [0,0,0] & [0,0,0] & [0,0.02,0.5] & [0.1,0.14,0.17] \\ [0,0,0.75] & [0.036,0.054,0.11] & [0.016,0.019,0.028] & [0,0.022,0.038] & [0,0,0] \\ [0.085,0.095,0.15] & [0.108,0.11,0.174] & [0.13,016,0.19] & [0,0.044,0.075] & [0.05,0.09,0.1] \\ [0.075,0.085,0.19] & [0.18,0.21,0.22] & [0.128,0.14,0152] & [0,0.019,0.025] & [0.09,0.11,0.12] \end{bmatrix}$$

步骤 5　确定最优参考数列。

由式(11-7)知

$$V_o=\{[0.15,0.17,0.95],[0.18,0.21,0.22],[0.13,0.16,0.19],$$
$$[0.19,0.22,0.50],[021,0.24,0.27]\}$$

步骤 6　确定关联度。

由式(11-8)知，各可行方案的关联系数为

$$\xi_1=(1.000,0.8323,0.7316,0.5432,0.4327)$$
$$\xi_2=(1.000,0.5236,0.8972,0.3913,0.3563)$$
$$\xi_3=(0.8113,0.5323,1.000,0.3471,0.5321)$$
$$\xi_4=(0.6112,0.8331,0.7123,1.000,0.4234)$$
$$\xi_5=(0.7823,0.6897,0.7631,0.6532,1.000)$$

由式(11-9)知，各可行方案的关联度为

$$t_4=0.7160,\ t_1=0.7078,\ t_5=0.7777,\ t_2=0.6337,\ t_3=0.6446$$

则 $1>t_5>t_4>t_1>t_3>t_2>0$。

步骤 7　可行方案排序。

按 r_i 由大到小排序，则各方案的优先次序为

$$方案 5 \succ 方案 4 \succ 方案 1 \succ 方案 3 \succ 方案 2$$

即方案 5 为最佳方案。

应用结果说明：本章在定义三元区间数的次定义和次运算的基础上，依据灰色系统理论，给出基于三元区间数的灰色关联度决策模型，该模型既适用于区间数多指标决策问题，又适合于指标取值为区间数的多指标问题，具有广泛的适用性。在具体建模过程中，本章以灰色关联度为依据，在利用信息熵确定权重向量的基础上，并定义信息度的情况下，建立了三元区间数的多指标决策方法，该法是传统灰色关联度决策法的改进，也是区间数多指标决策的一种新方法。

第 12 章　基于离差法的三元区间数决策模型

利用三元区间数，对权重未知的多指标决策问题进行了研究。依据三元区间数排序公式和运算关系，利用拉格朗日函数确定决策方案平衡系数大小的情况下，建立了多指标决策问题的数学模型。该模型把离差法拓展为三元区间数形式的基础上，利用离差法确定各决策指标权重系数。并在确定关联度的基础上，对模型进行了求解。最后对决策模型进行了应用分析，结果表明该法科学合理、计算简单、所需信息量少。

12.1　问题描述与相关界定

12.1.1　问题描述

在多指标决策问题中，由于指标属性的多样性，以往都是通过建立非线性的模型进行决策、优化和评价。由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性，关于决策分析理论的研究还不够完善和成熟，特别是对三元区间数的研究刚刚起步，文献[85]、[86]对三元区间数的运算进行了初步研究。本章利用三元区间数的概念，并结合关联度的知识，将多指标决策问题转化成指标取值为三元区间数的多指标决策问题情况下，通过建立基于三元区间数的排序度来研究多指标决策问题。本章提出的基于三元区间数的多指标决策模型，在利用离差法确定各个指标权重值的基础上，通过界定三元区间数的排序度，利用数学中的拉格朗日函数确定平衡系数的情况下，建立了多指标决策的数学模型。

12.1.2　相离度和相异度的界定

本章依据徐泽水教授提出的有关排序指标，在对其改进的基础上，提出三元区间数的排序指标。

定义 12.1　设任意两个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，令

$$l([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])=\frac{1}{3}(|a^--b^-|+|a^*-b^*|+|a^+-b^+|)$$

则称 $l([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])$ 为三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$ 的相

离度。

定义 12.2 设有两个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，令

$$\rho([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(a^- - b^-)^2+(a^* - b^*)^2+(a^+ - b^+)^2}$$

则 $\rho([\bar{\bar{A}}],[\bar{\bar{B}}])$ 为三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$ 的相异度。

12.2 基于三元区间数的灰色关联度法

多指标决策问题描述，设有 n 个可行方案集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，m 个属性集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$。属性集中 v_j 的权重 w_j 未知，但 $\sum_{j=1}^{m}w_j=1$。对于方案 u_i 按第 j 个指标 v_j 属性进行测度，得到 u_i 关于指标 v_j 的属性值为三元区间 $[a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+]$ $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，则用三元区间数表示的决策矩阵为

$$([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times m} \tag{12-1}$$

12.2.1 决策矩阵的标准化

为了消除各指标间的不可公度性和统一各指标的趋势要求，对决策矩阵 $([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times m}$ 进行标准化处理，令

$J^+=\{$效益型指标$\}$，$J^-=\{$成本型指标$\}$，$J^{\text{fixed}}=\{$固定型指标$\}$

则

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left[\frac{a_{ij}^-}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^-},\frac{a_{ij}^*}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^*},\frac{a_{ij}^+}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^+}\right],\quad i=1,2,\cdots,n;\ j\in J^+$$

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left[\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^-}{a_{ij}^-},\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^*}{a_{ij}^*},\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^+}{a_{ij}^+}\right],\quad i=1,2,\cdots,n;\ j\in J^-$$

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|[\bar{\bar{a}}_{ij}]-[\bar{\bar{a}}^*]\right|-\left|[\bar{\bar{a}}_{ij}]-[\bar{\bar{a}}^*]\right|\right)\Big/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|[\bar{\bar{a}}_{ij}]-[\bar{\bar{a}}^*]\right|\right)$$

$$i=1,2,\cdots,n;\ j\in J^{\text{fixed}}$$

其中，$[\bar{\bar{A}}_{ij}]=[a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+]$ 为考察值；$[\bar{\bar{a}}^*]=[k_{ij}^-,k_{ij}^*,k_{ij}^+]$$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 且 $[\bar{\bar{a}}^*]$ 为固定值。

处理后的标准化决策矩阵为

$$\begin{bmatrix} [r_{11}^-,r_{11}^*,r_{11}^+] & [r_{12}^-,r_{12}^*,r_{12}^+] & \cdots & [r_{1m}^-,r_{1m}^*,r_{1m}^+] \\ [r_{21}^-,r_{21}^*,r_{21}^+] & [r_{22}^-,r_{22}^*,r_{22}^+] & \cdots & [r_{2m}^-,r_{2m}^*,r_{2m}^+] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [r_{n1}^-,r_{n1}^*,r_{n1}^+] & [r_{n2}^-,r_{n2}^*,r_{n2}^+] & \cdots & [r_{nm}^-,r_{nm}^*,r_{nm}^+] \end{bmatrix} = ([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+])_{n\times m} \quad (12\text{-}2)$$

12.2.2　加权标准决策矩阵的确定

权重向量表示的是各影响因素在评判过程中所占的重要性程度，为了减少决策中的主观因素，用标准差法确定权重向量。并将标准差法推广到三元区间数上，用基于三元区间数的标准差法来确定决策指标的权重系数。步骤如下：

步骤 1　确定指标 v_j 的均值。

分别求各决策指标 v_j 的隶属值 $[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]$ 的均值

$$[\bar{\bar{E}}_j]=[e_j^-,e_j^*,e_j^+]=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_{ij}^-,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_{ij}^*,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_{ij}^+\right] \quad (12\text{-}3)$$

步骤 2　确定指标 v_j 的均方差。

求各决策指标 v_j 的均方差

$$[\bar{\bar{\sigma}}_j]=[\sigma_j^-,\sigma_j^*,\sigma_j^+]=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]-[e_j^-,e_j^*,e_j^+])^2} \quad (12\text{-}4)$$

步骤 3　确定指标 v_j 的权重系数。

求各决策指标 v_j 的权系数

$$\begin{aligned}[\bar{\bar{W}}_j]&=[w_j^-,w_j^*,w_j^+]\\ &=[\bar{\bar{\sigma}}_j]\cdot\left[\sum_{j=1}^{m}[\bar{\bar{\sigma}}_j]\right]^{-1}\end{aligned} \quad (12\text{-}5)$$

则用三元区间数表示的权重向量为

$$[\vec{\bar{\bar{W}}}]=\{[w_1^-,w_1^*,w_1^+],[w_2^-,w_2^*,w_2^+],\cdots,[w_m^-,w_m^*,w_m^+]\} \quad (12\text{-}6)$$

$$\text{s.t.}:\sum_{i=1}^{m}w_i^-\leqslant 1,\sum_{i=1}^{m}w_i^*=1,\sum_{i=1}^{m}w_i^+\geqslant 1,w_i^->0,w_i^*>0,w_i^+>0$$

三元区间数的加权标准决策矩阵为

$$([c_{ij}^-,c_{ij}^*,c_{ij}^+])_{n\times m} \quad (12\text{-}7)$$

其中，$[c_{ij}^-,c_{ij}^*,c_{ij}^+]=[w_j^-,w_j^*,w_j^+]\cdot[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]$($i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m$)。

12.2.3　参考序列的确定

参考数列的元素应该由各可行方案的加权三元区间数标准化指标值的最优三

元区间数组成，令

$$v_o^-(j)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}c_{ij}^-,\quad v_o^*(j)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}c_{ij}^*,\quad v_o^+(j)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}c_{ij}^+ \tag{12-8}$$

其中，$j=1,2,\cdots,m$。

参考数列

$$V_o=\{[v_o^-(1),v_o^*(1),v_o^+(1)],[v_o^-(2),v_o^*(2),v_o^+(2)],\cdots,[v_o^-(m),v_o^*(m),v_o^+(m)]\} \tag{12-9}$$

12.2.4 关联度的确定

令各可行方案属性指标的加权三元区间数标准化指标数列为

$$V_i=\{[c_{i1}^-,c_{i1}^*,c_{i1}^+],[c_{i2}^-,c_{i2}^*,c_{i2}^+],\cdots,[c_{im}^-,c_{im}^*,c_{im}^+]\} \tag{12-10}$$

与 V_i 参考数列 V_o 的关联系数为

$$[\bar{\bar{\xi}}_i(k)]=[\xi_i^-(k),\xi_i^*(k),\xi_i^+(k)]$$

$$=\frac{\min\limits_i\min\limits_k|[v_o^-(k),v_o^*(k),v_o^+(k)]-[c_{ik}^-,c_{ik}^*,c_{ik}^+]|+\rho\max\limits_i\max\limits_k|[v_o^-(k),v_o^*(k),v_o^+(k)]-[c_{ik}^-,c_{ik}^*,c_{ik}^+]|}{|[v_o^-(k),v_o^*(k),v_o^+(k)]-[c_{ik}^-,c_{ik}^*,c_{ik}^+]|+\rho\max\limits_i\max\limits_k|[v_o^-(k),v_o^*(k),v_o^+(k)]-[c_{ik}^-,c_{ik}^*,c_{ik}^+]|} \tag{12-11}$$

其中，$\rho=0.5$；$k=1,2,\cdots,m$。

第 i 个可行方案与参考数列 V_o 的关联度为

$$\begin{aligned}[\bar{\bar{T}}_i]&=[t_i^-,t_i^*,t_i^+]\\&=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}[\bar{\bar{\xi}}_i(k)]\end{aligned} \tag{12-12}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n$。

基于三元区间数的关联度序列为

$$[\vec{\bar{\bar{T}}}]=\{[t_1^-,t_1^*,t_1^+],[t_2^-,t_2^*,t_2^+],\cdots,[t_n^-,t_n^*,t_n^+]\} \tag{12-13}$$

12.2.5 最佳方案的确定

定义 12.3 设三元区间数 $[\bar{\bar{T}}_i]=[t_i^-,t_i^*,t_i^+]$，令

$$P([\bar{\bar{T}}_i])=\mu\frac{t_i^-+t_i^+}{2}+(1-\mu)(1-t_i^*) \tag{12-14}$$

则称 $P([\bar{\bar{T}}_i])$ 为三元区间数 $[\bar{\bar{T}}_i]=[t_i^-,t_i^*,t_i^+]$ 的排序度。

式(12-14)中 $\mu(0<\mu<1)$ 为平衡系数，可以根据实际问题事先给定，也可由拉格朗日函数求得。本章采用如下方法求解，即令

$$x_1=\mu,\quad x_2=1-\mu$$

则优化问题

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[x_1\left(\frac{t_i^-+t_i^+}{2}\right)+x_2(1-t_i^*)\right]-x_1\ln x_1-x_2\ln x_2\right\} \tag{12-15}$$

$$\text{s.t.}: x_1+x_2=1, x_1>0, x_2>0$$

由于式(12-15)为非线性方程，依据数学中的极值原理，式(12-15)有唯一解。简化求解过程，最后其解为

$$x_1=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(t_i^-+t_i^+)+t_i^*-1\right]\right)\cdot\left[1+\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(t_i^-+t_i^+)+t_i^*-1\right]\right)\right]^{-1} \tag{12-16}$$

$$x_2=\left[1+\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(t_i^-+t_i^+)+t_i^*-1\right]\right)\right]^{-1} \tag{12-17}$$

所以，由 x_1、x_2 可知平衡系数 $\mu(0<\mu<1)$，从而可知 $P([\bar{\bar{T}}_i])$ 值。

依据三元区间数的排序关系，将基于三元区间数的排序度 $P([\bar{\bar{T}}_i])$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 由大到小排序，最大排序度 $P([\bar{\bar{T}}_i])$ 对应的可行方案 u_i 就是最佳方案。

12.3 应用举例

2005 年根据某市现有公交线路网络，考虑到城市的发展，有关部门提出 5 种公交线网的优化调整方案，要求有关部门在这 5 种方案中选出一种最佳的优化方案。其中考察的指标有：乘客出行时间、线网覆盖率、乘客直达率、线网重复系数和线网日均满载率。5 种优化方案记为方案 1、方案 2、方案 3、方案 4 和方案 5。各方案对指标的考察值如表 12-1。

表 12-1　指标考察值

方案种类	线网日均满载率/%	线网覆盖率/%	线网重复系数/%	乘客直达率/%	乘客出行时间/min
方案 1	[0.59,0.61,0.62]	[0.63,0.65,0.72]	[0.26,0.28,0.32]	[0.61,0.63,0.65]	[10,12,15]
方案 2	[0.63,0.70,0.75]	[0.55,0.62,0.68]	[0.31,0.33,0.35]	[0.52,0.53,0.57]	[12,18,20]
方案 3	[0.55,0.63,0.65]	[0.58,0.63,0.69]	[0.28,0.32,0.34]	[0.53,0.54,0.55]	[20,22,25]
方案 4	[0.63,0.65,0.72]	[0.61,0.67,0.69]	[0.21,0.23,0.25]	[0.51,0.55,0.58]	[16,18,23]
方案 5	[0.55,0.65,0.75]	[0.65,0.68,0.73]	[0.24,0.25,0.27]	[0.52,0.53,0.56]	[15,17,22]

步骤 1 建立决策矩阵。

由表 12-1 可知三元区间数的决策矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}[0.59,0.61,0.62] & [0.63,0.65,0.72] & [0.26,0.28,0.32] & [0.61,0.63,0.65] & [10,12,15]\\ [0.63,0.70,0.75] & [0.55,0.62,0.68] & [0.31,0.33,0.35] & [0.52,0.53,0.57] & [12,18,20]\\ [0.55,0.63,0.65] & [0.58,0.63,0.69] & [0.28,0.32,0.34] & [0.53,0.54,0.55] & [20,22,25]\\ [0.63,0.65,0.72] & [0.61,0.67,0.69] & [0.21,0.23,0.25] & [0.51,0.55,0.58] & [16,18,23]\\ [0.55,0.65,0.75] & [0.65,0.68,0.73] & [0.24,0.25,0.27] & [0.52,0.53,0.56] & [15,17,23]\end{bmatrix}$$

步骤 2 决策矩阵标准化处理。

$$R=\begin{bmatrix}[0.112,0.113,0.115] & [0.172,0.174,0.175] & [0.136,0.137,0.138] & [0.167,0.168,0.170] & [0.142,0.143,0.145]\\ [0.152,0.153,0.156] & [0.123,0.125,0.128] & [0.152,0.153,0.158] & [0.138,0.139,0.141] & [0.123,0.125,0.127]\\ [0.108,0.109,0.111] & [0.111,0.114,0.116] & [0.133,0.134,0.136] & [0.156,0.158,0.159] & [0.173,0.174,0.176]\\ [0.132,0.133,0.134] & [0.153,0.155,0.157] & [0.144,0.145,0.146] & [0.142,0.147,0.148] & [0.134,0.136,0.138]\\ [0.160,0.162,0.165] & [0.162,0.165,0.167] & [0.123,0.125,0.127] & [0.143,0.145,0.147] & [0.168,0.169,0.170]\end{bmatrix}$$

步骤 3 确定权重向量。

由式(12-5)～式(12-7)知

$$[\vec{\bar{W}}]=([0.201,0.202,0.203],[0.192,0.220,0.201],[0.197,0.199,0.201],$$
$$[0.201,0.202,0.205],[0.211,0.212,0.213])$$

步骤 4 确定加权标准决策矩阵。

由式(12-9)可知

$$B=\begin{bmatrix}[0.019,0.020,0.021] & [0.021,0.022,0.024] & [0.023,0.024,0.025] & [0.028,0.029,0.030] & [0.020,0.022,0.023]\\ [0.020,0.021,0.022] & [0.018,0.019,0.020] & [0.023,0.024,0.026] & [0.024,0.025,0.026] & [0.018,0.019,0.020]\\ [0.018,0.019,0.021] & [0.017,0.018,0.019] & [0.020,0.022,0.023] & [0.027,0.028,0.030] & [0.022,0.023,0.024]\\ [0.020,0.021,0.023] & [0.019,0.020,0.022] & [0.020,0.021,0.022] & [0.026,0.027,0.029] & [0.018,0.019,0.021]\\ [0.021,0.022,0.024] & [0.021,0.022,0.023] & [0.018,0.019,0.021] & [0.026,0.027,0.028] & [0.022,0.023,0.026]\end{bmatrix}$$

步骤 5 确定最优参考数列。

由式(12-10)知

$$V_o=\{[0.212,0.221,0.229],[0.211,0.217,0.223],[0.231,0.239,0.243],$$
$$[0.281,0.287,0.291],[0225,0.237,0.247]\}$$

步骤 6 确定关联度列。

由式(12-11)～式(12-13)知

$$[\vec{\bar{T}}]=\{[0.117,0.118,0.119],[0.110,0.111,0.112],[0.112,0.113,0.114],$$
$$[0.138,0.139,0.140],[0.120,0.121,0.122]\}$$

步骤 7 可行方案排序。

由式(12-16)、式(12-17)知，平衡系数 $\mu=0.3415$，则由式(12-14)知，各可行方案的排序度为

$$P([\overline{\overline{T}}_1]) = 0.4613, \quad P([\overline{\overline{T}}_2]) = 0.3257$$

$$P([\overline{\overline{T}}_3]) = 0.4719, \quad P([\overline{\overline{T}}_4]) = 0.5087$$

$$P(\widetilde{T}_5) = 0.4219$$

按 $P([\overline{\overline{T}}_i])$ 由大到小排序，则各方案的优先次序为

$$方案 2 > 方案 5 > 方案 1 > 方案 3 > 方案 4$$

即方案 2 为最佳方案。

应用结果说明：本章建立了基于离差法的三元区间数关联度决策模型，该模型是首次将决策指标的权重系数值用三元区间数表示，并依据三元区间数的基本理论来实现多指标决策问题的方案优先排序，保证了计算过程的科学性。并且整个决策过程都采用三元区间数进行，所以该模型具有新颖性和创新性。

第 13 章　基于三元区间数的理想决策模型

依据三元区间数的基本定义，在将权重为区间数的多指标决策问题转化为指标取值为三元区间数的基础上，将多指标决策问题转化为基于三元区间数的单指标决策问题。依据运筹学中的理想点法，建立基于三元区间数的理想决策模型。本章在界定三元区间数理想方案点的基础上，给出了权重系数为三元区间数的逼近理想点法，实现最佳决策方案的优先选取；并将决策模型应用于某城市公交线网的优化调整中，取得满意效果。

13.1　三元区间数的次定义

二元区间数只用上下限来表示，有些学者称为两参数区间[55]。在两参数区间数中，上、下限间的各个数值可以认为取值机会均等。用两参数区间数表示一个参量时：一方面，为了覆盖整个取值范围，区间可能会取得过大，这时如果再认为整个区间内取值机会均等，得出的结果就会出现大的误差[55]；另一方面，偏向于取区间数的边值(即上限或下限)，这样就成为一个实数，失去了区间数的定义。所以，为了解决这个问题，本章使用三元区间数进行决策，不仅保持了参数的取值区间，而且还能突出取值可能性最大的重心(即在区间内取值可能性最大的那个数，偏好信息值)，以弥补二元区间数的不足。

在三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 中，特元 a^* 的取值机会最大，由 a^* 向上限的大元 a^+ 或向下限的小元 a^- 取值可能性递减。对于三元区间数可以用分布函数的形式表示其在区间取值机会的大小，如函数

$$\int_{a^l}^{a^u} f(x)\mathrm{d}x=1,\quad f_{\max}=f(a^*) \tag{13-1}$$

为使决策结果更加科学合理，依据学者刘家学等提出的相关理论[90]，本章来界定三元区间数的次定义。

定义 13.1　设有两个三元区间数 $[\bar{\bar{A}}]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $[\bar{\bar{B}}]=[b^-,b^*,b^+]$，且它们的分布函数分别为 $f_{[\bar{\bar{A}}]}(x)$，$f_{[\bar{\bar{B}}]}(x)$，则设

$$p_{[\bar{\bar{A}}]>[\bar{\bar{B}}]}=\int_{a^l}^{a^u} f_{[\bar{\bar{A}}]}(s)\mathrm{d}s\int_{b^l}^{s} f_{[\bar{\bar{B}}]}(t)\mathrm{d}t \tag{13-2}$$

(1) 当 $p_{[\bar{\bar{A}}]>[\bar{\bar{B}}]}>0.5$ 时，认为 $[\bar{\bar{A}}]$ 大于 $[\bar{\bar{B}}]$。

(2) 当 $p_{[\bar{\bar{A}}]>[\bar{\bar{B}}]}=0.5$ 时，认为 $[\bar{\bar{A}}]$ 等价于 $[\bar{\bar{B}}]$。

(3) 设 $p_{[\bar{\bar{A}}]>[\bar{\bar{B}}]}=1-p_{[\bar{\bar{A}}]>[\bar{\bar{B}}]}$，当 $p_{[\bar{\bar{A}}]>[\bar{\bar{B}}]}<0.5$ 时，认为 $[\bar{\bar{B}}]$ 大于 $[\bar{\bar{A}}]$。

13.2　基于三元区间数的理想决策模型

理想点法是指理想中的一个优化决策方案，而这个方案在实际中并不存在。这个理想方案的每个目标函数值(即决策指标值)在所有方案中相应的目标函数值都是最佳的，以此为参考方案，在决策目标空间中计算各方案到理想方案的距离，并按距离大小进行排序，距离越小，方案就越优。因此，理想决策法适合多目标决策问题。本章基于三元区间数理论，将理想点法推广到三元区间数，建立基于三元区间数的理想决策模型。

13.2.1　标准决策矩阵的建立

对于多目标决策问题，设备择集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，因素集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$。

因素集中 v_j 的权重 w_j 不能完全确定，但却知 $w_j\in[c_j^-,c_j^+]$ 且趋向于 c_j^*。其中，$0\leqslant c_j^-\leqslant c_j^*\leqslant c_j^+\leqslant 1$；$j=1,2,\cdots,n$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$。

所以，设因素集的权重向量

$$[\vec{\bar{\bar{W}}}]=([w_1^-,w_1^*,w_1^+],[w_2^-,w_2^*,w_2^+],\cdots,[w_m^-,w_m^*,w_m^+])$$

根据某个因素给出评判对象对备择集中各元素的隶属度，用三元区间数来表示的决策矩阵为

$$([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times m} \tag{13-3}$$

其中，$[a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+](i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 为备择 u_i 对因素 v_j 的属性值。

由于各指标的含义不同，指标值的计算方法也不同，造成各个指标的量纲各异，因此为了使各指标有公度性必须对决策矩阵进行标准化处理。令

$J^+=\{$效益型指标$\}$，　$J^-=\{$成本型指标$\}$，　$J^{\text{fixed}}=\{$固定型指标$\}$

则将决策矩阵 $([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times m}$ 标准化处理，令

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left[\frac{a_{ij}^- - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^-}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^- - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^-},\frac{a_{ij}^* - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^*}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^* - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^*},\frac{a_{ij}^+ - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^+}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^+ - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^+}\right]$$

$$i=1,2,\cdots,n;\ j\in J^+$$

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left[\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^- - a_{ij}^-}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^- - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^-},\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^* - a_{ij}^*}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^* - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^*},\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^+ - a_{ij}^+}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^+ - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}^+}\right]$$

$$i=1,2,\cdots,n;\ j\in J^-$$

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|[\bar{\bar{a}}_{ij}]-[\bar{\bar{a}}^*]\right|-\left|[\bar{\bar{a}}_{ij}]-[\bar{\bar{a}}^*]\right|\right)\Big/\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|[\bar{\bar{a}}_{ij}]-[\bar{\bar{a}}^*]\right|\right)$$

$$i=1,2,\cdots,n;\ j\in J^{\text{fixed}}$$

其中，$[\bar{\bar{a}}_{ij}]=[a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+]$ 为考察值；$[\bar{\bar{a}}^*]=[k_{ij}^-,k_{ij}^*,k_{ij}^+]$$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 且$[\bar{\bar{a}}^*]$为固定值的三元区间数。

所以标准化决策矩阵为

$$\begin{bmatrix}[r_{11}^-,r_{11}^*,r_{11}^+] & [r_{12}^-,r_{12}^*,r_{12}^+] & \cdots & [r_{1m}^-,r_{1m}^*,r_{1m}^+]\\ [r_{21}^-,r_{21}^*,r_{21}^+] & [r_{22}^-,r_{22}^*,r_{22}^+] & \cdots & [r_{2m}^-,r_{2m}^*,r_{2m}^+]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [r_{n1}^-,r_{n1}^*,r_{n1}^+] & [r_{n2}^-,r_{n2}^*,r_{n2}^+] & \cdots & [r_{nm}^-,r_{nm}^*,r_{nm}^+]\end{bmatrix} \tag{13-4}$$

即 $([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+])_{n\times m}$。

13.2.2 权重系数向量的确定

权重向量表示的是各影响因素在决策过程中所占的重要性程度，为了减少决策中的主观因素，用标准差法确定权重向量，则用三元区间数的形式表示为

$$[\vec{\bar{\bar{C}}}]=([c_1^-,c_1^*,c_1^+],[c_2^-,c_2^*,c_2^+],\cdots,[c_m^-,c_m^*,c_m^+]) \tag{13-5}$$

其中

$$c_i^-=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_{ij}^- - \sum_{j=1}^m r_{ij}^-\right)\Big/(n-1)\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_{ij}^-$$

$$c_i^*=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_{ij}^* - \sum_{j=1}^m r_{ij}^*\right)\Big/(n-1)\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_{ij}^*$$

$$c_i^+=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_{ij}^+ - \sum_{j=1}^m r_{ij}^+\right)\Big/(n-1)\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_{ij}^+$$

则归一化处理得到规范化权重系数向量为

$$[\vec{\bar{\bar{W}}}] = ([w_1^-, w_1^*, w_1^+], [w_2^-, w_2^*, w_2^+], \cdots, [w_m^-, w_m^*, w_m^+]) \tag{13-6}$$

$$\text{s.t.}: \sum_{i=1}^{m} w_i^- \leqslant 1, \sum_{i=1}^{m} w_i^* = 1, \sum_{i=1}^{m} w_i^+ \geqslant 1, w_i^- > 0, w_i^* > 0, w_i^+ > 0$$

其中，$w_i^- = c_i^- \Big/ \sum_{i=1}^{m} c_i^*, w_i^* = c_i^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} c_i^*, w_i^+ = c_i^+ \Big/ \sum_{i=1}^{m} c_i^* \ (i = 1, 2, \cdots, m)$。

13.2.3　基于三元区间数的加权标准决策矩阵

三元区间数的加权标准决策矩阵为

$$([b_{ij}^-, b_{ij}^*, b_{ij}^+])_{n \times m} \tag{13-7}$$

其中，$[b_{ij}^-, b_{ij}^*, b_{ij}^+] = [w_j^-, w_j^*, w_j^+] \cdot [r_{ij}^-, r_{ij}^*, r_{ij}^+] \ (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$。

13.2.4　正负理想方案的定义

令正理想方案

$$A^+ = \{[t_1^-, t_1^*, t_1^+], [t_2^-, t_2^*, t_2^+], \cdots, [t_m^-, t_m^*, t_m^+]\} \tag{13-8}$$

其中

$$[t_j^-, t_j^*, t_j^+] = \begin{cases} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b_{ij}^-, b_{ij}^*, b_{ij}^+\}, & j \in J^+ \\ \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b_{ij}^-, b_{ij}^*, b_{ij}^+\}, & j \in J^- \\ \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b_{ij}^-, b_{ij}^*, b_{ij}^+\}, & j \in J^{\text{fixed}} \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

负理想方案

$$A^- = \{[s_1^-, s_1^*, s_1^+], [s_2^-, s_2^*, s_2^+], \cdots, [s_m^-, s_m^*, s_m^+]\} \tag{13-9}$$

其中

$$[s_j^-, s_j^*, s_j^+] = \begin{cases} \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b_{ij}^-, b_{ij}^*, b_{ij}^+\}, & j \in J^+ \\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b_{ij}^-, b_{ij}^*, b_{ij}^+\}, & j \in J^- \\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b_{ij}^-, b_{ij}^*, b_{ij}^+\}, & j \in J^{\text{fixed}} \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

13.2.5　距离和相对贴近度的计算

令决策方案 $u_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 到正理想方案的距离为 d_i^+，到负理想方案的距离为 d_i^-，则

$$d_i^+ = d(u_i, A^+) = \sqrt{(d_{i1}^+)^2 + (d_{i2}^+)^2 + \cdots + (d_{im}^+)^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{13-10}$$

其中

$$d_{ij}^+ = \max\{|b_{ij}^- - t_j^-|, |b_{ij}^* - t_j^*|, |b_{ij}^+ - t_j^+|\}, \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

$$d_i^- = d(u_i, A^-) = \sqrt{(d_{i1}^-)^2 + (d_{i2}^-)^2 + \cdots + (d_{im}^-)^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{13-11}$$

其中

$$d_{ij}^{-}=\max\{|b_{ij}^{-}-s_{j}^{-}|,|b_{ij}^{*}-s_{j}^{*}|,|b_{ij}^{+}-s_{j}^{+}|\},\quad j=1,2,\cdots,m$$

定义 13.2　决策方案 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 到正理想方案的贴近度

$$e_i=d_i^{-}/(d_i^{+}+d_i^{-}) \tag{13-12}$$

则 $0<e_i<1$。

依据三元区间数的排序准则，按 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 由大到小的次序排列，其中值最大的对应的方案最优。

13.3　应用举例

本章采用第 11 章的案例分析来进行应用研究。具体计算步骤如下：

步骤 1　建立决策矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}
[0.5,0.6,0.7] & [0.63,0.65,0.7] & [0.26,0.28,0.32] & [0.61,0.63,0.65] & [10,12,15]\\
[0.6,0.7,0.75] & [0.55,0.62,0.68] & [0.3,0.33,0.35] & [0.52,0.53,0.57] & [12,18,20]\\
[0.55,0.6,0.65] & [0.58,0.63,0.69] & [0.28,0.32,0.34] & [0.53,0.54,0.55] & [20,22,25]\\
[0.6,0.65,0.7] & [0.61,0.67,0.69] & [0.21,0.23,0.25] & [0.51,0.55,0.58] & [16,18,23]\\
[0.55,0.65,0.7] & [0.65,0.68,0.7] & [0.2,0.25,0.27] & [0.52,0.53,0.56] & [15,17,23]
\end{bmatrix}$$

步骤 2　决策矩阵标准化处理得

$$R=\begin{bmatrix}
[0,0,0.5] & [0.8,0.5,1] & [0.3,0.4,0.5] & [1,1,1] & [1,1,1]\\
[1,1,1] & [0,0,0] & [0,0,0] & [0,0.1,0.2] & [0.4,0.5,0.8]\\
[0,0,0.5] & [0.3,0.4,0.5] & [0.1,0.1,0.2] & [0,0.1,0.2] & [0,0,0]\\
[0.5,0.5,1] & [0.5,0.6,0.83] & [0.9,1,1] & [0,0.2,0.3] & [0.2,0.4,0.4]\\
[0.5,0.5,1] & [1,1,1] & [0.8,0.8,1] & [0,0.1,0.1] & [0.3,0.3,0.5]
\end{bmatrix}$$

步骤 3　由式(13-5)知权重向量为

$$[\vec{\bar{C}}]=([0.15,0.17,0.19],[0.18,0.21,0.22],[0.14,0.16,0.19],$$
$$[0.19,0.22,0.25],[0.21,0.22,0.27])$$

由式(13-6)归一化处理得

$$[\vec{\bar{W}}]=([0.15,0.17,0.19],[0.18,0.21,0.22],[0.14,0.16,0.19],$$
$$[0.19,0.22,0.25],[0.21,0.22,0.27])$$

步骤 4　由式(13-7)得三元区间数的加权标准决策矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}
[0,0,0.95] & [0.105,0.144,0.22] & [0.056,0.057,0.08] & [0.19,0.22,0.25] & [0.21,0.24,0.27]\\
[0.15,0.17,0.19] & [0,0,0] & [0,0,0] & [0,0.02,0.5] & [0.1,0.14,0.17]\\
[0,0,0.75] & [0.036,0.054,0.11] & [0.016,0.019,0.028] & [0,0.022,0.038] & [0,0,0]\\
[0.085,0.095,0.15] & [0.108,0.11,0.174] & [0.13,016,0.19] & [0,0.044,0.075] & [0.05,0.09,0.1]\\
[0.075,0.085,0.19] & [0.18,0.21,0.22] & [0.128,0.14,0152] & [0,0.019,0.025] & [0.09,0.11,0.12]
\end{bmatrix}$$

步骤 5　于是由式(13-8)、式(13-9)知：

正理想方案为

$$A^{+}=\{[0.15,0.17,0.19],[0.18,0.21,0.22],[0,0,0],[0.19,0.22,0.25],[0,0,0]\}$$

负理想方案为

$$A^{-}=\{[0,0,0],[0,0,0],[0.14,0.16,0.19],[0,0,0],[0.21,0.22,0.27]\}$$

步骤 6　由式(13-10)、式(13-11)知

$$d_1^{+}=0.345,\quad d_2^{+}=0.354,\quad d_3^{+}=0.360,\quad d_4^{+}=0.308,\quad d_5^{+}=0.305$$

$$d_1^{-}=0.340,\quad d_2^{-}=0.305,\quad d_3^{-}=0.348,\quad d_4^{-}=0.305,\quad d_5^{-}=0.350$$

所以贴近度

$$e_1=0.496,\quad e_2=0.463,\quad e_3=0.492,\quad e_4=0.498,\quad e_5=0.534$$

即

$$1>e_5>e_4>e_1>e_3>e_2>0$$

则方案 5 为最佳方案。

应用结果说明：依据三元区间数的基本定义及运算关系，结合逼近理想点法提出基于三元区间数的理想决策模型，不但得到了决策模型的精确解，而且也为区间数多指标决策问题提供了一种新方法。

第 14 章　基于三元区间数的风险动态决策模型

利用三元区间数的基本理论，在考虑时间的因素上，对权重未知的多指标决策问题进行了研究。从动态的角度出发，考虑决策者的风险因素基础上，利用三元区间数排序公式，来构建多指标决策问题的风险动态模型，实现最佳方案的优选。本章是针对一类指标权重信息未知且指标值为三元区间数的风险动态多属性决策问题，提出了一种基于三元区间数的风险动态多属性决策模型。在利用离差法确定各指标权重值的情况下，依据三元区间数来确定关联度值，并对模型进行了求解计算，取得了满意成果。

14.1　风险动态多属性决策问题的描述

在实际生活中，存在着大量的动态多属性决策问题，这类问题的实质是在时间、指标、方案三维空间的情况下进行方案综合排序[91]。在动态多指标决策问题中，若指标值在测度时存在不确定性信息，就可用三元区间数来描述，将这类特殊的动态多属性决策问题称为风险动态决策问题。但同时，在实际应用中往往需要考虑不同的自然状态，即不确定性的情形，才能达到决策目的。一般地，不同自然状态下各方案的决策系数不会相同，而自然状态本身又是一个客观变化的随机量，这种条件下的决策问题便是一个风险动态多指标决策问题[92]。

本章探讨了一类指标权重系数未知，且指标值同时为存在三元区间数的风险动态多指标决策问题。利用基于三元区间数离差法确定各个指标权重值的基础上，通过定义排序度，提出了一种新的基于三元区间数的风险动态多属性决策模型，以满足实际决策的需要。

设基于三元区间数的风险型动态多属性决策问题：

(1) 方案集为 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$。

(2) 决策指标集为 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$。

(3) 指标 C_j 的权重为 $\left[\bar{\bar{W}}_j\right]$，满足

$$0\leqslant w_j^-,w_j^*,w_j^+\leqslant 1,\quad \sum_{i=1}^{m}w_i^-\leqslant 1,\quad \sum_{i=1}^{m}w_i^*=1,\quad \sum_{i=1}^{m}w_i^+\geqslant 1$$

这里多指标的权重向量 $\left[\vec{\bar{\bar{W}}}\right]=\left(\left[w_1^{-(i)},w_1^{*(i)},w_1^{+(i)}\right],\left[w_2^{-(i)},w_2^{*(i)},w_2^{+(i)}\right],\cdots,\left[w_n^{-(i)},w_n^{*(i)},w_n^{+(i)}\right]\right)$ 是未知的。

(4) 时间点为 $T_i(i=1,2,\cdots,q)$ 其相应的时间权重为 $[\bar{\bar{\lambda}}_j]$，满足

$$0<\lambda_j^-,\lambda_j^*,\lambda_j^+<1,\quad \sum_{i=1}^{q}\lambda_i^-\leqslant 1,\quad \sum_{i=1}^{q}\lambda_i^*=1,\quad \sum_{i=1}^{q}\lambda_i^+\geqslant 1$$

这里时间点的权重向量 $[\overrightarrow{\bar{\bar{\lambda}}_i}]=([\lambda_1^{-(i)},\lambda_1^{*(i)},\lambda_1^{+(i)}],[\lambda_2^{-(i)},\lambda_2^{*(i)},\lambda_2^{+(i)}],\cdots,[\lambda_q^{-(i)},\lambda_q^{*(i)},\lambda_q^{+(i)}])$ 也是未知的。

对于每个决策指标 C_j 都有 l 种可能的状态 $H=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l)$，在时间点 T_i、指标 C_j 下状态 θ_t 发生的频率为 $p_{tj}^{(i)}$，满足 $0\leqslant p_{tj}^{(i)}\leqslant 1(1\leqslant t\leqslant l)$ 且 $\sum_{t=1}^{l}p_{tj}^{(i)}=1$。所以，在状态 θ_t 下，决策方案 X_r 对应于时间点 T_i、指标 C_j 的属性值记为 $[\bar{\bar{a}}_{rjt}^{(i)}]=[a_{rjt}^{-(i)},a_{rjt}^{*(i)},a_{rjt}^{+(i)}]$ 是三元区间数。在时间点 T_i 各状态下的风险决策表见表 14-1。在已知各时间点 $T_i(i=1,2,\cdots,q)$ 的风险决策表信息情况下，需要对决策方案进行综合排序[92]。其中，$[\bar{\bar{a}}_{rjt}^{(i)}]=[a_{rjt}^{-(i)},a_{rjt}^{*(i)},a_{rjt}^{+(i)}](r=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n;t=1,2,\cdots,l)$ 为属性值。

表 14-1 时间点 T_i 的风险决策信息值

方案			X_1	X_2	…	X_m
C_1	θ_1	$p_{11}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{111}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{211}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{m11}^{(i)}]$
	θ_2	$p_{21}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{112}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{212}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{m12}^{(i)}]$
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
	θ_l	$p_{l1}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{11l}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{21l}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{m1l}^{(i)}]$
C_2	θ_1	$p_{12}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{121}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{221}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{m21}^{(i)}]$
	θ_2	$p_{22}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{122}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{222}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{m22}^{(i)}]$
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
	θ_l	$p_{l2}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{12l}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{22l}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{m2l}^{(i)}]$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
C_n	θ_1	$p_{1n}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{1n1}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{2n1}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{mn1}^{(i)}]$
	θ_2	$p_{2n}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{1n2}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{2n2}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{mn2}^{(i)}]$
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
	θ_l	$p_{ln}^{(i)}$	$[\bar{\bar{a}}_{1nl}^{(i)}]$	$[\bar{\bar{a}}_{2nl}^{(i)}]$	…	$[\bar{\bar{a}}_{mnl}^{(i)}]$

14.2 风险动态决策的数学原理

14.2.1 决策矩阵的标准化

定义 14.1 依据徐泽水教授提出的模糊语言处理准则[6]，称 $s_1=\{$极差(extremely poor)，很差(very poor)，差(poor)，一般(fair)，好(good)，很好(very good)，极好(extremely good)$\}$或 $s_2=\{$极低，很低，低，一般，高，很高，极高$\}$为语言类模糊数集，其对应的三元区间数表达形式定义为

$$\text{极差}=\left[\bar{\bar{EP}}\right]=[0,0.05,0.1],\quad \text{很差}=\left[\bar{\bar{VP}}\right]=[0.1,0.25,0.3]$$

$$\text{差}=\left[\bar{\bar{P}}\right]=[0.3,0.35,0.4],\quad \text{一般}=\left[\bar{\bar{F}}\right]=[0.4,0.5,0.6]$$

$$\text{好}=\left[\bar{\bar{G}}\right]=[0.6,0.7,0.8],\quad \text{很好}=\left[\bar{\bar{VG}}\right]=[0.8,0.85,0.9]$$

$$\text{极好}=\left[\bar{\bar{EG}}\right]=[0.9,0.95,1]$$

其中，极好>很好>好>一般>差>很差>极差；s_2 对应的三元区间数表达式与 s_1 相同。

定义 14.2 若一个矩阵 D 的所有元素都是用三元区间数表示，则称 D 为三元区间数矩阵。

所以，对时间点 T_i 的风险决策表中各状态下的指标数据求期望值，合并为一个无风险的基于三元区间数的决策矩阵

$$\left(\left[\bar{\bar{E}}_{rj}^{(i)}\right]\right)_{m\times n}=\left(\left[e_{rj}^{-(i)},e_{rj}^{*(i)},e_{rj}^{+(i)}\right]\right)_{m\times n} \tag{14-1}$$

其中，$\left[\bar{\bar{E}}_{rj}^{(i)}\right]=p_{rj}^{(i)}\cdot\sum_{t=1}^{l}\left[\bar{\bar{A}}_{rjt}^{(i)}\right]$。

当所有时间点的风险决策表信息全部化成无风险决策矩阵后，需要对其进行规范化处理，以消除不同物理量纲对决策结果的影响[92]。最常见的指标类型有效益型指标、成本型指标、固定型指标。本章采用固定变化法来进行标准化处理。

假设 $\left[\bar{\bar{Y}}_{rj}^{(i)}\right]$ 为时间点 T_i 上，属于指标 C_j 上各方案的理想值，则

$$\left[\bar{\bar{Y}}_{rj}^{(i)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\left[\bar{\bar{A}}_{rj}^{(i)}\right]}{\left[\bar{\bar{g}}_{j}^{(i)}\right]}+\frac{\left[\bar{\bar{g}}_{j}^{(i)}\right]}{\left[\bar{\bar{A}}_{rj}^{(i)}\right]}\right]^{-1} \tag{14-2}$$

其中，$r=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。

所以，决策矩阵序列 $\left(\left[\overline{\overline{E}}_{rj}^{(i)}\right]\right)_{m\times n}=\left(\left[e_{rj}^{-(i)},e_{rj}^{*(i)},e_{rj}^{+(i)}\right]\right)_{m\times n}$ 转化为标准规范化矩阵序列

$$\left(\left[\overline{\overline{Y}}_{rj}^{(i)}\right]\right)_{m\times n}=\left(\left[y_{rj}^{-(i)},y_{rj}^{*(i)},y_{rj}^{+(i)}\right]\right)_{m\times n} \tag{14-3}$$

即处理后的标准化决策矩阵为

$$\begin{bmatrix} [y_{11}^{-(i)},y_{11}^{*(i)},y_{11}^{+(i)}] & [y_{12}^{-(i)},y_{12}^{*(i)},y_{12}^{+(i)}] & \cdots & [y_{1n}^{-(i)},y_{1n}^{*(i)},y_{1n}^{+(i)}] \\ [y_{21}^{-(i)},y_{21}^{*(i)},y_{21}^{+(i)}] & [y_{22}^{-(i)},y_{22}^{*(i)},y_{22}^{+(i)}] & \cdots & [y_{2n}^{-(i)},y_{2n}^{*(i)},y_{2n}^{+(i)}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [y_{m1}^{-(i)},y_{m1}^{*(i)},y_{m1}^{+(i)}] & [y_{m2}^{-(i)},y_{m2}^{*(i)},y_{m2}^{+(i)}] & \cdots & [y_{mn}^{-(i)},y_{mn}^{*(i)},y_{mn}^{+(i)}] \end{bmatrix} \tag{14-4}$$

14.2.2　加权标准决策矩阵的确定

权重向量表示的是各影响因素在评判过程中所占的重要性程度，为了减少决策中的主观因素，用标准差法确定权重向量(具体见第 12 章)。用三元区间数的形式表示，得到决策指标的权重向量。

用三元区间数表示决策指标的权重向量为

$$\left[\overrightarrow{\overline{\overline{W}}}_i\right]=\{[w_1^{-(i)},w_1^{*(i)},w_1^{+(i)}],[w_2^{-(i)},w_2^{*(i)},w_2^{+(i)}],\cdots,[w_n^{-(i)},w_n^{*(i)},w_n^{+(i)}]\} \tag{14-5}$$

三元区间数的加权标准决策矩阵为

$$\left(\left[b_{rj}^{-(i)},b_{rj}^{*(i)},b_{rj}^{+(i)}\right]\right)_{m\times n} \tag{14-6}$$

其中

$$[b_{rj}^{-(i)},b_{rj}^{*(i)},b_{rj}^{+(i)}]=[w_j^{-(i)},w_j^{*(i)},w_j^{+(i)}]\cdot[y_{rj}^{-(i)},y_{rj}^{*(i)},y_{rj}^{+(i)}]$$
$$r=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

14.2.3　决策模型的建立与求解

定义 14.3　设有两个三元区间数 $\left[\overline{\overline{A}}\right]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $\left[\overline{\overline{B}}\right]=[b^-,b^*,b^+]$，令

$$\left\|\left[\overline{\overline{A}}\right],\left[\overline{\overline{B}}\right]\right\|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(a^--b^-)^2+(a^*-b^*)^2+(a^+-b^+)^2} \tag{14-7}$$

则 $d\left(\left[\overline{\overline{A}}\right],\left[\overline{\overline{B}}\right]\right)=\left\|\left[\overline{\overline{A}}\right],\left[\overline{\overline{B}}\right]\right\|$ 为三元区间数 $\left[\overline{\overline{A}}\right]=[a^-,a^*,a^+]$ 和 $\left[\overline{\overline{B}}\right]=[b^-,b^*,b^+]$ 的距离。

定义 14.4　对于决策矩阵序列 $D_1,D_2,\cdots,D_m$，其中

$$D_k=\left(\left[\overline{\overline{D}}_{ij}^{(k)}\right]\right)_{q\times n}=\left(\left[d_{ij}^{-(k)},d_{ij}^{*(k)},d_{ij}^{+(k)}\right]\right)_{q\times n}$$

称 $\tilde{\tilde{F}} = ([\bar{f}_{ij}])_{q\times n}$ 为决策正理想矩阵，$\tilde{\tilde{G}} = ([\bar{g}_{ij}])_{q\times n}$ 为决策负理想矩阵，且有

$$[\bar{f}_{ij}] = [f_{ij}^-, f_{ij}^*, f_{ij}^+] = [\max_k d_{ij}^{-(k)}, \max_k d_{ij}^{*(k)}, \max_k d_{ij}^{+(k)}] \tag{14-8}$$

$$[\bar{g}_{ij}] = [g_{ij}^-, g_{ij}^*, g_{ij}^+] = [\min_k d_{ij}^{-(k)}, \min_k d_{ij}^{*(k)}, \min_k d_{ij}^{+(k)}] \tag{14-9}$$

其中，$k = 1,2,\cdots,m; i = 1,2,\cdots,q; j = 1,2,\cdots,n$。

定义 14.5 设 $\tilde{\tilde{A}}_1, \tilde{\tilde{A}}_2, \cdots, \tilde{\tilde{A}}_m$ 为决策矩阵序列，有

$$\tilde{\tilde{A}}_k = ([\bar{A}_{ij}^{(k)}])_{q\times n} = ([a_{ij}^{-(k)}, a_{ij}^{*(k)}, a_{ij}^{+(k)}])_{q\times n}$$

其中，$k = 1,2,\cdots,m; i = 1,2,\cdots,q; j = 1,2,\cdots,n$。

设 $\tilde{\tilde{A}}_o$ 为基于三元区间数的参考决策矩阵，$\tilde{\tilde{A}}_s$ 为基于三元区间数的比较决策矩阵。令

$$\Delta_{osij} = d([\bar{A}_{ij}^{(o)}], [\bar{A}_{ij}^{(s)}])$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(a_{ij}^{-(o)} - a_{ij}^{-(s)})^2 + (a_{ij}^{*(o)} - a_{ij}^{*(s)})^2 + (a_{ij}^{+(o)} - a_{ij}^{+(s)})^2} \tag{14-10}$$

$$\Delta_{\max} = \max_s \max_i \max_j \Delta_{osij} \tag{14-11}$$

则关联系数和关联度分别定义为

$$\xi_{sij} = \frac{\rho\Delta_{\max}}{\Delta_{osij} + \rho H_{\max}} \tag{14-12}$$

$$[\bar{\gamma}] = \gamma(\tilde{\tilde{A}}_o, \tilde{\tilde{A}}_s) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{q}[\bar{\lambda}_i][\bar{w}_j]\xi_{sij} \tag{14-13}$$

其中，ρ 为分辨系数且 $\rho \in (0,1)$，一般情况下取 $\rho = 0.5$；$[\bar{\lambda}_j]$ 为时间点 T_i 的权重系数；$[\bar{W}_j]$ 为指标 C_j 的权重系数。

把关于时间点的规范化矩阵序列 H_i 改写成关于决策方案 X_k 的矩阵序列得

$$\tilde{\tilde{H}}_k = ([\bar{H}_{ij}^{(k)}])_{q\times n}$$
$$= ([h_{ij}^{-(k)}, h_{ij}^{*(k)}, h_{ij}^{+(k)}])_{q\times n} \tag{14-14}$$

其中，$k = 1,2,\cdots,m$。

对于决策方案矩阵序列 $\tilde{\tilde{H}}_k$，构造决策正理想矩阵 $\tilde{\tilde{F}} = ([\bar{f}_{ij}])_{q\times n}$ 和决策负理想矩阵 $\tilde{\tilde{G}} = ([\bar{g}_{ij}])_{q\times n}$。

方案矩阵 $\tilde{\tilde{H}}_k$ 与决策正理想方案 $\tilde{\tilde{F}} = ([\bar{f}_{ij}])_{q\times n}$ 的关联度为

$$\left[\overline{\overline{R}}_k^{(+)}\right]=\gamma(\tilde{\tilde{F}},\tilde{\tilde{H}}_k) \tag{14-15}$$

方案矩阵 $\tilde{\tilde{H}}_k$ 与决策负理想方案 $\tilde{\tilde{G}}=\left(\left[\overline{\overline{g}}_{ij}\right]\right)_{q\times n}$ 的关联度为

$$\left[\overline{\overline{R}}_k^{(-)}\right]=\gamma(\tilde{\tilde{G}},\tilde{\tilde{H}}_k) \tag{14-16}$$

由于 $\left[\overline{\overline{R}}_k^{(+)}\right]=\gamma(\tilde{\tilde{F}},\tilde{\tilde{H}}_k)$ 越大，表示决策方案 X_k 与理想方案的关联度越大，方案越优；而 $\left[\overline{\overline{R}}_k^{(-)}\right]=\gamma(\tilde{\tilde{G}},\tilde{\tilde{H}}_k)$ 越小，表示决策方案 X_k 与理想方案的关联度越小，方案越差。所以，最优的决策方案应该是与理想方案的关联度最大，而同时最优的决策方案与负理想方案的关联度最小。

令 $\tilde{\tilde{H}}_k$ 以从属度 $[\overline{\overline{u}}_k]$ 从属于决策正理想矩阵 $\tilde{\tilde{F}}=\left(\left[\overline{\overline{f}}_{ij}\right]\right)_{q\times n}$，则 $[\overline{\overline{u}}_k]$ 的补集 $[\overline{\overline{u}}_k^{-}]$ 从属于决策负理想矩阵 $\tilde{\tilde{G}}=\left(\left[\overline{\overline{g}}_{ij}\right]\right)_{q\times n}$。依据三元区间数基本知识，构建数学模型来确定 $[\overline{\overline{u}}_k]$。

考虑到全体 m 个决策方案的权时序理想关联差异度的平方与权时序负理想关联差异度的平方之总和为最小[92]。所以建立基于三元区间数的非线性数学模型，如下：

$$\min\left\{V\left(\left[\overline{\overline{U}}\right]\right)=\sum_{k=1}^{m}\left[\left[\overline{\overline{u}}_k^{-}\right]\cdot r(\tilde{\tilde{F}},\tilde{\tilde{H}}_k)\right]^2+\sum_{k=1}^{m}\left[\left[\overline{\overline{u}}_k\right]\cdot r(\tilde{\tilde{G}},\tilde{\tilde{H}}_k)\right]^2\right\} \tag{14-17}$$

则可以解得系统的最优解向量为

$$\overrightarrow{\left[\overline{\overline{U}}\right]}=\left([u_1^-,u_1^*,u_1^+],[u_2^-,u_2^*,u_2^+],\cdots,[u_m^-,u_m^*,u_m^+]\right)$$

由于式 (14-17)是一个极值问题，可利用极值求导得到其值。令

$$\frac{\partial V(u)}{\partial\left[\overline{\overline{u}}_k\right]}=0 \tag{14-18}$$

则模型(14-17)的最优解为

$$[\overline{\overline{u}}_k]=\frac{r^2(\tilde{\tilde{F}},\tilde{\tilde{H}}_k)}{r^2(\tilde{\tilde{F}},\tilde{\tilde{H}}_k)+r^2(\tilde{\tilde{G}},\tilde{\tilde{H}}_k)},\quad k=1,2,\cdots,m \tag{14-19}$$

依据三元区间数的排序关系，按照 $[\overline{\overline{u}}_k]$ 的大小对所有决策方案进行综合排序，最后决策方案对应的 $[\overline{\overline{u}}_k]$ 越大，表示方案越优。

14.2.4　风险动态多属性决策模型的算法

步骤 1　决策矩阵的标准化处理。

步骤 2　依据式(14-5)，确定 t 时段各决策指标权重。

步骤 3　由五级权重法，确定各时段的权重系数。

步骤 4　依据式(14-13)，确定 t 时段优属度。

步骤 5　依据式(14-19)，确定各决策方案的综合优属度，并依据综合优属度的大小对各决策方案排序，排在最前面的决策方案为最佳方案。

14.3　应用举例

考虑到城市的发展，某投资银行拟对城市 A、城市 B、城市 C(记为 X_1, X_2, X_3 称决策方案)的公交系统进行投资，管理部门要求有关规划部门在这 3 个城市中进行优先排序。规划部门考察的指标有：线网覆盖率 C_1、线网日均满载率 C_2、公交企业效益 C_3。规划部门组织评估专家组考察了 3 个城市 A、城市 B、城市 C 分别在 2005 年、2006 年和 2007 年 3 个年度(分别记为 T_1, T_2, T_3) 在 3 个指标下的具体情况，其中在各年度每个指标对应有 3 种自然状态(记为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$，各状态对应的频率已知)，各指标权重信息完全未知。考察的指标值见表 14-2 。

表 14-2　指标考察值

指标		C_1			C_2			C_3		
状态		θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
2005	频率	0.3	0.3	0.4	0.2	0.4	0.4	0.3	0.4	0.3
	X_1	[0.59,0.61,0.62]	[0.63,0.70,0.75]	[0.61,0.72,0.79]	低	一般	高	低	高	一般
	X_2	[0.65,0.73,0.75]	[0.61,0.72,0.75]	[0.54,0.63,0.65]	高	一般	极高	高	低	极低
	X_3	[0.66,0.70,0.73]	[0.57,0.63,0.64]	[0.64,0.73,0.77]	高	极高	低	一般	高	极高
2006	频率	0.2	0.4	0.4	0.3	0.4	0.3	0.4	0.4	0.2
	X_1	[0.68,0.71,0.73]	[0.58,0.61,0.63]	[0.67,0.73,0.78]	高	低	一般	很低	低	一般
	X_2	[0.51,0.63,0.66]	[0.63,0.70,0.75]	[0.63,0.70,0.75]	低	一般	高	高	一般	很高
	X_3	[0.64,0.71,0.74]	[0.61,0.70,0.74]	[0.56,0.63,0.67]	极低	高	一般	低	高	一般
2007	频率	0.4	0.3	0.3	0.2	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4
	X_1	[0.62,0.71,0.75]	[0.63,0.70,0.76]	[0.58,0.61,0.63]	高	极高	一般	高	低	一般
	X_2	[0.66,0.72,0.76]	[0.60,0.62,0.65]	[0.59,0.63,0.68]	高	低	一般	一般	高	低
	X_3	[0.56,0.62,0.65]	[0.62,0.68,0.73]	[0.66,0.72,0.76]	极低	低	高	低	高	一般

步骤 1　考察值的模糊处理。

利用定义 14.1 把表 14-2 中指标 C_2 和 C_3 的考察值化成三元区间数，见表 14-3。

表 14-3　定性指标考察值的三元区间数表示

指标		C_2			C_3		
状态		θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
2005	频率	0.2	0.4	0.4	0.3	0.4	0.3
	X_1	[0.3,0.35,0.4]	[0.4,0.5,0.6]	[0.6,0.7,0.8]	[0.3,0.35,0.4]	[0.6,0.7,0.8]	[0.4,0.5,0.6]
	X_2	[0.6,0.7,0.8]	[0.4,0.5,0.6]	[0.9,0.95,1]	[0.6,0.7,0.8]	[0.3,0.35,0.4]	[0.1,0.25,0.3]
	X_3	[0.6,0.7,0.8]	[0.9,0.95,1]	[0.3,0.35,0.4]	[0.4,0.5,0.6]	[0.6,0.7,0.8]	[0.9,0.95,1]
2006	频率	0.3	0.4	0.3	0.4	0.4	0.2
	X_1	[0.6,0.7,0.8]	[0.3,0.35,0.4]	[0.4,0.5,0.6]	[0.1,0.25,0.3]	[0.3,0.35,0.4]	[0.4,0.5,0.6]
	X_2	[0.3,0.35,0.4]	[0.4,0.5,0.6]	[0.6,0.7,0.8]	[0.6,0.7,0.8]	[0.4,0.5,0.6]	[0.8,0.85,0.9]
	X_3	[0.1,0.25,0.3]	[0.6,0.7,0.8]	[0.4,0.5,0.6]	[0.3,0.35,0.4]	[0.6,0.7,0.8]	[0.4,0.5,0.6]
2007	频率	0.2	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4
	X_1	[0.6,0.7,0.8]	[0.9,0.95,1]	[0.4,0.5,0.6]	[0.6,0.7,0.8]	[0.3,0.35,0.4]	[0.4,0.5,0.6]
	X_2	[0.6,0.7,0.8]	[0.3,0.35,0.4]	[0.4,0.5,0.6]	[0.4,0.5,0.6]	[0.6,0.7,0.8]	[0.3,0.35,0.4]
	X_3	[0.1,0.25,0.3]	[0.3,0.35,0.4]	[0.6,0.7,0.8]	[0.3,0.35,0.4]	[0.6,0.7,0.8]	[0.4,0.5,0.6]

步骤 2　构建风险决策矩阵序列。

利用公式(14-1)，把表 14-1 和表 14-2 中指标考察值化成无风险决策矩阵序列得

$$E_1=\begin{bmatrix}[0.59,0.61,0.62] & [0.63,0.70,0.75] & [0.55,0.63,0.65]\\ [0.63,0.65,0.72] & [0.55,0.65,0.75] & [0.63,0.65,0.72]\\ [0.55,0.62,0.68] & [0.58,0.63,0.69] & [0.61,0.67,0.69]\end{bmatrix}$$

$$E_2=\begin{bmatrix}[0.60,0.67,0.69] & [0.53,0.60,0.65] & [0.54,0.60,0.63]\\ [0.61,0.65,0.73] & [0.65,0.75,0.78] & [0.53,0.55,0.62]\\ [0.65,0.68,0.71] & [0.59,0.63,0.68] & [0.65,0.68,0.69]\end{bmatrix}$$

$$E_3=\begin{bmatrix}[0.58,0.61,0.63] & [0.61,0.65,0.67] & [0.65,0.68,0.69]\\ [0.53,0.55,0.62] & [0.54,0.57,0.61] & [0.61,0.65,0.70]\\ [0.53,0.58,0.60] & [0.57,0.62,0.63] & [0.61,0.64,0.67]\end{bmatrix}$$

步骤 3　确定综合决策矩阵。

把无风险决策矩阵进行规范化处理，得到矩阵序列为

$$Y_1=\begin{bmatrix}[0.32,0.35,0.37] & [0.23,0.27,0.31] & [0.25,0.33,0.35]\\ [0.33,0.35,0.42] & [0.35,0.36,0.37] & [0.33,0.35,0.38]\\ [0.35,0.42,0.48] & [0.28,0.33,0.39] & [0.31,0.37,0.39]\end{bmatrix}$$

$$Y_2=\begin{bmatrix}[0.35,0.37,0.39] & [0.33,0.37,0.41] & [0.25,0.32,0.35]\\ [0.23,0.25,0.32] & [0.25,0.26,0.27] & [0.30,0.35,0.37]\\ [0.25,0.32,0.38] & [0.27,0.32,0.34] & [0.31,0.35,0.38]\end{bmatrix}$$

$$Y_3=\begin{bmatrix}[0.30,0.33,0.36] & [0.23,0.26,0.31] & [0.29,0.31,0.34]\\ [0.28,0.30,0.32] & [0.29,0.31,0.33] & [0.32,0.35,0.39]\\ [0.35,0.37,0.38] & [0.28,0.31,0.34] & [0.32,0.34,0.36]\end{bmatrix}$$

利用五级标度法得到时间点的权向量为

$$\left[\vec{\bar{\lambda}}\right]=\left([\bar{\lambda}_1],[\bar{\lambda}_2],[\bar{\lambda}_3]\right)$$
$$=([0.32,0.33,0.34],[0.31,0.34,0.35],[0.30,0.33,0.34])$$

则综合决策矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}[0.21,0.23,0.26] & [0.23,0.26,0.29] & [0.25,0.27,0.31]\\ [0.23,0.27,0.29] & [0.24,0.26,0.28] & [0.22,0.25,0.29]\\ [0.22,0.25,0.28] & [0.23,0.26,0.30] & [0.22,0.24,0.26]\end{bmatrix}$$

步骤 4 确定指标的权重系数。

把综合决策矩阵中的数据代入，利用基于三元区间数的离差法，求得指标权重向量为

$$\left[\vec{\bar{\bar{W}}}\right]=\left([\bar{\bar{w}}_1],[\bar{\bar{w}}_2],[\bar{\bar{w}}_3]\right)$$
$$=([0.313,0.328,0.342],[0.305,0.332,0.35],[0.326,0.340,0.362])$$

步骤 5 确定决策正理想矩阵和决策负理想矩阵为

$$F=\begin{bmatrix}[0.31,0.36,0.39] & [0.32,0.36,0.41] & [0.35,0.37,0.39]\\ [0.33,0.35,0.37] & [0.35,0.37,0.39] & [0.32,0.35,0.41]\\ [0.35,0.37,0.39] & [0.33,0.36,0.39] & [0.35,0.37,0.39]\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}[0.21,0.23,0.25] & [0.23,0.26,0.28] & [0.21,0.23,0.25]\\ [0.21,0.23,0.27] & [0.21,0.23,0.25] & [0.22,0.25,0.27]\\ [0.22,0.23,0.25] & [0.23,0.25,0.27] & [0.22,0.24,0.25]\end{bmatrix}$$

步骤 6 确定关联度为

$$\left[\bar{\bar{R}}_1^{(+)}\right]=[0.1231,0.1817,0.2013],\quad \left[\bar{\bar{R}}_1^{(-)}\right]=[0.1021,0.1563,0.1896]$$

$$\left[\bar{\bar{R}}_2^{(+)}\right]=[0.1432,0.1886,0.2103],\quad \left[\bar{\bar{R}}_2^{(-)}\right]=[0.1324,0.1672,0.1965]$$

$$\left[\bar{\bar{R}}_3^{(+)}\right]=[0.1118,0.1573,0.1983],\quad \left[\bar{\bar{R}}_3^{(-)}\right]=[0.1003,0.1293,0.1578]$$

步骤 7 确定从属度为

$$[\bar{\bar{u}}_1] = [0.0182, 0.0191, 0.0207]$$

$$[\bar{\bar{u}}_2] = [0.0202, 0.0221, 0.0237]$$

$$[\bar{\bar{u}}_3] = [0.0168, 0.0188, 0.0196]$$

步骤8　可行方案排序。

由三元区间数的排序关系，对 $[\bar{\bar{u}}_k]$ 由大到小排序，得到 $[\bar{\bar{u}}_2] > [\bar{\bar{u}}_1] > [\bar{\bar{u}}_3]$，则各方案的优先次序为

$$X_2 \succ X_1 \succ X_3$$

即城市B≻城市A≻城市C。所以城市B为最佳方案。

应用结果说明：该模型既适用于测度值为三元区间数的多指标决策问题，又适用于指标权重系数取值为区间数的多指标问题，所以该模型在实际应用中有一定的实用价值，特别适用于公司、企业中小规模优化方案的决策分析，具有很强的可推广性。

第 15 章　基于三元区间数的高速公路交通安全综合评判

针对高速公路交通安全问题，利用区间数理论中的三元区间数进行了研究。在对影响高速公路交通安全因素综合分析的基础上，构建了高速公路交通安全评价的指标体系。利用离差法确定评价指标权重系数的情况下，建立了基于三元区间数的高速公路交通安全评价模型。该模型依据三元区间数的基本运算和排序关系，提出了一种基于客观赋权下的三元区间评判模型，通过最大隶属度得到最佳评判结果。评判模型根据单指标的属性测度值与多指标的综合属性测度值，利用三元区间数准则来识别高速公路交通安全的现状水平。应用结果表明利用三元区间数评判模型，不但可以找出影响高速公路交通安全的问题成因和限制因素，而且为高速公路规划和改造提供科学决策依据。

15.1　问 题 描 述

公路运输在带来高效、快捷、方便的同时，不可避免地也带来了交通拥挤、环境污染、事故损害等诸多问题。尤其我国交通事故率居高不下、死伤人数逐年增长、经济损失不断加大，这已成为影响我国道路交通可持续、高速发展的重大问题[93]。高速公路交通安全的评价是对高速公路的道路条件、交通安全措施、交通管理设施和服务水平等方面做出相对满意度的判断，及时掌握道路交通安全问题演化内在规律，一方面是从技术管理及行政管理层面上指导交通安全管理政策、措施制定的重要途径；另一方面可以深入分析当前我国高速公路交通安全中存在的各种问题，探讨其内在规律。所以，通过对高速公路交通安全状况的研究，从宏观角度对全国各省高速公路的交通安全现状做出分析研究，为有关部门制定交通安全工作及改进措施计划提供有关科学依据。

目前，对高速公路交通安全的评价方法主要有层次分析法、模糊综合评价法和模糊区间评价法。层次分析法为定性描述方法，评价过程主观性强，评价结果科学性差；模糊综合评价法会出现分类不清、结果不合理的问题，主要原因是模糊综合评价对不同论域上的模糊集合之间进行“取大取小”运算是无意义的，并且最大隶属度准则不能比较细微的分类程度，不能解决有序分割类的识别问题；模糊区间评价法由于需要人为设计区间参数，区间点个数的选取尚无理论指导，而且随着评价指标个数的增加将影响收敛速度，计算过程也更复杂。由于高速公路交通安全问题属于第二类评价问题，无法获得较多的训练样本，而属性综合评价法的置信度准

则可较有效的解决有序分割类的识别问题，能够比较细微的分类程度，识别正确率较高，比传统的评价方法具有较好的评价效果，可找出影响高速公路交通安全的限制因素及潜在风险，减少高速公路交通事故发生。因此，本章依据高速公路的自身特点，利用属性数学的识别理论，在定性分析和定量分析相结合的基础上，建立了高速公路交通安全评价的三元区间数的综合评判模型。

15.2　高速公路交通安全评价指标体系

15.2.1　评价指标体系

由于影响高速公路交通安全的因素较多，既有内部因素（如道路线形、车辆性能等），又有外部因素（如管理水平、气候服务等），所以，如何建立高速公路交通安全的评价指标体系，至今没有一套公认行之有效的方法。高速公路交通安全的评价指标体系是高速公路系统进行交通安全诊断、危险点识别、安全控制与管理的前提，也是不同于目前一般的安全管理体系的新的评价指标体系。所以，通过综合分析，本章构建了高速公路交通安全评价指标体系，见表 15-1。

表 15-1　高速公路交通安全评价指标体系及量化标准

目标层	准则层	指标层		评价类				
				优秀	良好	中等	一般	较差
高速公路交通安全评价指标体系	迅捷性	u_1	路网连通度	0.85～1.0	0.75～0.85	0.65～0.75	0.55～0.65	0.0～0.55
		u_2	节点通达度	0.8～1.0	0.7～0.8	0.6～0.7	0.5～0.6	0.0～0.5
		u_3	路网车速/(km/h)	80～150	70～80	60～70	50～60	0.0～50
		u_4	路网流量/(人/日)	>1	0.8～1	0.7～0.8	0.5～0.7	0.0～0.5
	安全性	u_5	视距/km	>0.2	0.15～0.2	0.1～0.15	0.05～0.1	0.0～0.05
		u_6	交通隔离	0.9～1.0	0.8～0.9	0.7～0.8	0.6～0.7	0.0～0.6
		u_7	照明设施	0.9～1.0	0.8～0.9	0.7～0.8	0.6～0.7	0.0～0.6
		u_8	监控设施	0.9～1.0	0.8～0.9	0.7～0.8	0.6～0.7	0.0～0.6
		u_9	信息设施	0.9～1.0	0.8～0.9	0.7～0.8	0.6～0.7	0.0～0.6
	满意性	u_{10}	道路线形条件	0.9～1.0	0.8～0.9	0.7～0.8	0.6～0.7	0.0～0.6
		u_{11}	路面状况	0.9～1.0	0.8～0.9	0.7～0.8	0.6～0.7	0.0～0.6
		u_{12}	事故率/(次/年)	0～2.0	2.0～5.0	5.0～10.0	10.0～15.0	>15.0
		u_{13}	沿线景观	0.9～1.0	0.8～0.9	0.7～0.8	0.6～0.7	0.0～0.6
	舒适性	u_{14}	里程饱和率/%	0.9～1.0	0.8～0.9	0.7～0.8	0.6～0.7	0.0～0.6
		u_{15}	拥挤度	0.0～0.05	0.05～0.1	0.1～0.15	0.15～0.20	0.20～1.0

15.2.2 指标评价标准

为科学、合理、有效地评价高速公路交通安全系统，本章将高速公路交通安全系统评价的指标体系中每个指标测度范围分为：优秀、良好、中等、一般、较差 5 个测试区间。即评价集

$\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\}=$

{优秀(extremely good)，良好(very good)，中等(good)，一般(fair)，较差(poor)}

如何选择适宜的指标评价分类标准是决定评价是否合理的关键。由于在高速公路交通安全评价中无法获得较多的训练样本，因此不能采用聚类分析法求得评价类的中心值。本章确定的各个指标评价标准，以国内或国际标准以及国际或国内公认的高速公路交通安全标准来制定指标标准值，指标分级标准以指标实际值的国家标准或国外城市达到的平均水平为参考上限(优秀)，以国内高速公路交通安全现状评价水平为参考中间值(中等)，其余内插或外推确定，具体的分级标准值及各标准值的区间范围，见表 15-1。

15.3 多指标综合评判原理

在多指标决策问题的综合评判中，由于被评判对象带有不确定性，通常很难用普遍统一的数值来评价，使得这些对象在某些评判指标上属于某个评语的程度，即隶属度不再是一个确定的数，常常是一个范围，即用区间数来评判。由于区间数综合评判模型依据集值统计理论，利用线段法产生区间数，而线段法只取端点，从而忽视了中间值信息，所以评判结果误差比较大。所以，采用三元区间数进行评判不但考虑了区间端点信息，而且也考虑了中间值信息，所以能够更好地处理模糊评判问题。本章依据评判过程和结果中信息量的多少以及充分程度不同，利用三元区间数来描述模糊评判过程，在此基础上建立基于离差法的三元区间数评判模型。评判流程见图 15-1。

15.3.1 评判矩阵的建立

定义 15.1 依据学者徐泽水教授提出的模糊语言处理准测，令评语集 $S=\{$一级，二级，三级，四级，五级，六级，七级，八级，九级$\}$，其中一级$>$二级$>$三级$>$四级$>$五级$>$六级$>$七级$>$八级$>$九级。用三元区间数表示为

$\mathrm{Grade}[\bar{\bar{1}}]=$ 一级 $=[0.9,0.95,1.0]$， $\mathrm{Grade}[\bar{\bar{2}}]=$ 二级 $=[0.8,0.85,0.9]$

$\mathrm{Grade}[\bar{\bar{3}}]=$ 三级 $=[0.7,0.75,0.8]$， $\mathrm{Grade}[\bar{\bar{4}}]=$ 四级 $=[0.6,0.65,0.7]$

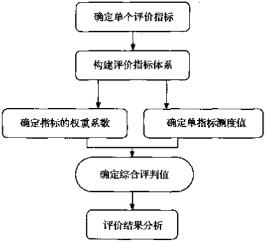


图 15-1　高速公路交通安全的综合评价流程

$\text{Grade}\left[\bar{\bar{5}}\right]=$ 五级 $=[0.5,0.55,0.6]$，　$\text{Grade}\left[\bar{\bar{6}}\right]=$ 六级 $=[0.4,0.45,0.5]$

$\text{Grade}\left[\bar{\bar{7}}\right]=$ 七级 $=[0.3,0.35,0.4]$，　$\text{Grade}\left[\bar{\bar{8}}\right]=$ 八级 $=[0.2,0.25,0.3]$

$\text{Grade}\left[\bar{\bar{9}}\right]=$ 九级 $=[0.0,0.1,0.2]$

定义 15.2　设 A 为评价对象，且有 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为因素集，其中 x_i 为评判指标；$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_9\}$ 为评语集(定义 15.1)；评判矩阵 $\tilde{\tilde{R}}=([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+])_{n\times 9}$ 表示因素集和评语集之间的映射关系。

由于自身带有某些不确定性信息并且已知信息不充分，对指标 x_i 而言 A 属于 y_j 的程度一般为三元区间数

$$\left[\bar{\bar{r}}_{ij}\right]=[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+],\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,9$$

则评价对象 A 的评判矩阵

$$\tilde{\tilde{R}}=\left([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]\right)_{n\times 9}\tag{15-1}$$

15.3.2　评价指标权重系数的确定

为了得到科学合理的评价结果，避免主观因素的影响，在评价过程中，采用离差法来确定评价指标的权重系数。计算如下：

(1) 分别求评价指标 x_i 的隶属值 $\left[\bar{\bar{r}}_{ij}\right]=[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]$ 的均值得

$$\left[\bar{\bar{E}}_i\right]=[e_i^-,e_i^*,e_i^+]=\left[\frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9}r_{ij}^-,\frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9}r_{ij}^*,\frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9}r_{ij}^+\right]\tag{15-2}$$

（2）求评价指标 x_i 的均方差得

$$[\bar{\bar{\sigma}}_i]=[\sigma_i^-,\sigma_i^*,\sigma_i^+]=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{9}([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]-[e_i^-,e_i^*,e_i^+])^2} \quad (15\text{-}3)$$

（3）求评价指标 x_i 的权重系数得

$$[\bar{\bar{w}}_i]=[w_i^-,w_i^*,w_i^+]=[\bar{\bar{\sigma}}_i]\Big/\sum_{i=1}^{n}[\bar{\bar{\sigma}}_i] \quad (15\text{-}4)$$

用三元区间数表示的权重向量为

$$[\vec{\bar{\bar{W}}}]=([w_1^-,w_1^*,w_1^+],[w_2^-,w_2^*,w_2^+],\cdots,[w_9^-,w_9^*,w_9^+]) \quad (15\text{-}5)$$

$$\text{s. t.}: \sum_{i=1}^{9}w_i^-\leqslant 1,\sum_{i=1}^{9}w_i^*=1,\sum_{i=1}^{9}w_i^+\geqslant 1,w_i^->0,w_i^*>0,w_i^+>0$$

15.3.3 三元区间数的评判向量

为了保留尽可能多的评判信息，利用三元区间数基本运算，得到三元区间数的评判向量为

$$[\vec{\bar{\bar{B}}}]=[\vec{\bar{\bar{W}}}]\cdot\tilde{\tilde{R}}=([b_1^-,b_1^*,b_1^+],[b_2^-,b_2^*,b_2^+],\cdots,[b_9^-,b_9^*,b_9^+]) \quad (15\text{-}6)$$

其中

$$[b_i^-,b_i^*,b_i^+]=[w_j^-,w_j^*,w_j^+]\cdot[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+],\quad i=1,2,\cdots,9$$

15.3.4 评价等级的确定

为了得到科学、合理的评价结果，对评判向量 $[\vec{\bar{\bar{B}}}]$ 进行均值化处理。令三元区间数

$$[\bar{\bar{C}}]=[c^-,c^*,c^+] \quad (15\text{-}7)$$

其中，$c^-=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}b_i^-$；$c^*=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}b_i^*$；$c^+=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}b_i^+$。

依据定义中的三元区间数的最大隶属度原则，三元区间数 $[\bar{\bar{C}}]=[c^-,c^*,c^+]$ 属于评语集 Grade$[\bar{\bar{i}}]$ $(i=1,2,\cdots,9)$ 中的哪个等级范围，则评价对象 A 就为该等级范围对应的 i 级别，即对应的等级为评价对象 A 的最终评判结果。

15.4 评判模型应用分析

为了对某地区现有高速公路交通安全进行合理的评价，交通部门组织有关专家在 2005 年 6 月 10 日至 2005 年 6 月 20 日对某地区高速公路进行了一次实地乘

客询问调查和考察，获得很多有关高速公路交通安全要素的有效数据，见表 15-1，然后利用上面提出的基于三元区间数的评判模型对某地区现有高速公路交通安全总体水平做出综合评价。具体评价过程如下：

步骤 1　依据 2005 年考察得到的数据，可知该地区的隶属矩阵为

$$
\widetilde{R}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.4,0.45,0.5] & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & [0.5,0.55,0.6] & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.3,0.35,0.4] & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.4,0.45,0.5] & 0 & 0 & 0\\
0 & [0.8,0.85,0.9] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & [0.6,0.65,0.7] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & [0.6,0.65,0.7] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.3,0.35,0.4] & 0 & 0\\
[0.9,0.95,1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.4,0.45,0.5] & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & [0.7,0.75,0.8] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.2,0.25,0.3] & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & [0.5,0.55,0.6] & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.4,0.45,0.5] & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0,0.1,0.2]
\end{bmatrix}
$$

步骤 2 利用离差法,得到评价指标权重向量为

$$[\vec{\bar{\bar{W}}}] = ([0.61,0.65,0.72],[0.82,0.87,0.92],[0.57,0.61,0.63],$$
$$[0.63,0.69,0.73],[0.71,0.75,0.83],[0.67,0.72,0.75],$$
$$[0.51,0.58,0.63],[0.73,0.78,0.83],[0.51,0.58,0.63],$$
$$[0.61,0.67,0.71],[0.69,0.73,0.78],[0.58,0.63,0.71],$$
$$[0.71,0.78,0.83],[0.63,0.68,0.75],[0.81,0.85,0.92])$$

步骤 3 依据公式(15-6),进行综合评价得

$$[\vec{\bar{\bar{B}}}] = ([0.55,0.67,0.72],[0.57,0.64,0.75],[0.36,0.44,0.51],$$
$$[0.84,0.94,1.11],[0.71,0.83,1.01],[0.94,1.17,1.43],$$
$$[0.39,0.48,0.58],[0.12,0.16,0.21],[0.00,0.09,0.18])$$

步骤 4 依据公式(15-7),均值化处理得

$$[\bar{\bar{C}}] = [0.497,0.558,0.601] \rightarrow [0.5,0.55,0.6]$$

所以某地区现有高速公路交通安全的模糊综合评价结果为“五级”。

通过综合评价分析可以知道,解决高速公路交通安全问题需要从各个方面综合治理,加强对高速公路使用者,尤其是高速公路车辆驾驶员的安全教育,提高其交通法规意识;提高车辆安全性能,保障车辆行驶安全;提高高速公路道路管理服务水平,加强管理力度,完善道路安全设施和行车条件等都是重要的环节。目前,应该以交通安全目标管理为导向,以现代科技为先导,以法规建设和充分的资金投入为保障,以实施最严格的管理措施为手段,采取特别措施将保障高速公路交通安全的 4 大措施——教育、工程、执法和急救统一规划,协调推进[94]。

应用结果说明:基于三元区间数的评判模型将高速公路交通安全多目标评价问题转化成为单目标评价问题,使高速公路交通安全的评价问题变得简单易行。而且该法对进一步发展高速公路交通安全,改善高速公路交通安全具有重要的意义和实用价值。并通过分析评价结果,找出解决高速公路交通安全的限制因素和问题成因。应用结果表明基于三元区间数的评判模型的评价结果不但可以直观地反映出高速公路交通安全的现状水平,而且对构建高速公路现代化的管理机制和提高管理水平具有现实意义。

第 16 章　基于三元区间数的投影排序模型

多指标决策是按照某种决策准则，对具有多个指标的有限方案进行选择和排序。但由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性和局限性，人们往往不能明确地给出属性的信息量，所以在实际决策中，许多决策信息具有模糊性，导致决策者对属性评价很难用一个精确的数值描述出来，在这种情况下，学者们提出用区间数表示属性的信息量。所以针对不确定性条件下的多指标决策问题，在定义信息度的基础上，本章利用三元区间数理论对多指标决策问题进行了综合研究。利用给出的三元区间数的基本定义、基本运算和排序关系，在定义三元区间数理想点的基础上，依据投影排序机理，建立了一种基于客观权重系数的投影决策排序模型，并利用投影值的大小得到决策方案最优排序。实例分析说明了排序模型的实用性和有效性。

16.1　问题描述

随着社会、经济的快速发展，决策问题的复杂性、不确定性以及人们对快速变化的决策环境认识的模糊性正在不断增强，在实际的决策问题中，通常表现为决策信息（指标权重信息、指标取值信息等）具有不确定性或模糊性。这种不确定性和模糊性使得决策信息通常不是以数值点形式表示，而是以区间数形式表示。但是用区间数对多指标决策问题研究时，学者们发现用一个区间数表示属性值的同时属性值偏好于区间内某个数，具有偏好信息。于是本章提出用三元区间数来表示决策者对属性决策的结果。由于三元区间数对多指标决策问题的研究有着重要意义，所以本章在定义决策方案在三元区间数理想点上的投影等概念的基础上，提出了一种新的决策方案排序法，从理论上丰富了多指标决策理论内涵。

16.2　投影排序的基本原理

由于多属性决策程序一般被分为两部分：一部分是利用一定的算子将决策对象的多属性模糊指标和模糊权重合成能够代表方案结合指标的模糊综合效用值；另一部分是利用一定的比较和排序方法对模糊综合效用进行比较和排序，以确定使决策者获得满意的方案作为决策的结果[51]。本章基于决策者主观不确定偏好特征的模糊数距离计算公式的基础上，提出新的综合决策方法。

设多指标决策问题有 n 个待选方案，m 个决策指标。记 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为方案集；$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 为指标集；$W=(w_1,w_2,w_3,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 为属性的权重向量，且 $w_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，$\sum_{i=1}^{m}w_i=1$。

对于方案 x_i 按属性 u_j 进行测度，得到 x_i 关于属性 u_j 的属性值为

$$[\bar{A}_{ij}]=[a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+],\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m \tag{16-1}$$

从而构成决策矩阵为

$$\tilde{\tilde{A}}=([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times m} \tag{16-2}$$

决策指标确定后，通过查找统计资料或推导计算确定决策指标的属性值。各个属性之间由于量纲不同、单位不同、数量纲不同、测度标准不同，不可能直接利用初始属性指标值进行比较和综合排序。因此，为了使各决策指标值有公度性必须对属性值进行标准化处理。本章采用无量纲化标准函数进行处理。依据比重变化法对决策矩阵进行标准化处理。对决策矩阵 $([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times m}$ 进行标准化处理，令

$$J^+=\{\text{效益型指标}\},\quad J^-=\{\text{成本型指标}\}$$

则

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left[\frac{a_{ij}^-}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^-},\frac{a_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^*},\frac{a_{ij}^+}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^+}\right],\quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^+$$

$$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=\left[\frac{(a_{ij}^-)^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}^-)^{-1}},\frac{(a_{ij}^*)^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}^*)^{-1}},\frac{(a_{ij}^+)^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}^+)^{-1}}\right],\quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^-$$

则标准化处理后的决策矩阵为

$$\tilde{\tilde{R}}=([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+])_{n\times m} \tag{16-3}$$

16.2.1 指标权重系数的确定

在多属性决策问题中各属性权重大小的分布直接影响着决策的结果。给定权重指标是否合理，直接关系到决策结果的正确性和可信程度。为了解决这一问题，本章采用层次分析法来确定指标的权重值信息。

层次分析法的基本原理是：先按问题的要求建立起一个描述系统功能或特征的系统递阶层次机构，给出相关判断标准，在对每一层的系统要素进行两两比较的基础上，建立判断矩阵。然后通过判断矩阵特征向量的计算，得出该层要素对上一层要素的权重系数。在此基础上，计算出各层要素对于总目标的综合权重[76]。具体实施步骤为：

(1) 根据层次分析结构，构造各层次的判断矩阵，判断矩阵表示在同一准则下的决策指标两两比较的相对重要程度，通过判断矩阵可求出下一层次的子元素相对于上相邻一层次元素的相对权重[76]。判断矩阵的决策指标两两比较的相对重要程度，可参考表 16-1 来确定。

表 16-1　因素间相对重要程度比较

相对比值	界定
$a_{ij}=1$	因素 i 与因素 j 同样的重要性
$a_{ij}=3$	因素 i 比因素 j 稍微重要
$a_{ij}=5$	因素 i 比因素 j 明显重要
$a_{ij}=7$	因素 i 比因素 j 强烈重要
$a_{ij}=9$	因素 i 比因素 j 极端重要
$a_{ij}=2、4、6、8$	因素 i 比因素 j 是两相邻判断的中值
倒数	因素 j 与因素 i 的比较判断 $a_{ji}=1/a_{ij}$

(2) 进行判断矩阵的一致性检验。

步骤 1　确定检验指标。

依据运筹学中的检验指标公式[76]

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{16-4}$$

其中，$\lambda_{\max}$ 为判断矩阵的最大特征根；n 为矩阵阶数。

当 $CI=0$ 时，显然判断矩阵具有近似一致性。

步骤 2　一致性检验。

依据运筹学中的一致性检验公式[76]

$$CR=\frac{CI}{RI} \tag{16-5}$$

当 $CR<0.1$ 时，认为判断矩阵一致性可以接受，RI 的参考值见表 16-2。

表 16-2　阶的判断矩阵平均随机一致性指标 RI 值[76]

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
RI 值	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48

(3) 计算指标的相对权重。在层次分析法中，判断矩阵的权数可通过求出正规化的特征向量求得。由于判断矩阵本身已经带有不少误差，并不需要很高的精度，本章采用几何平均法求决策指标的权重系数，计算步骤如下：

步骤 1　计算判断矩阵每一行元素的乘积 $M_i(i=1,2,\cdots,m)$ 得

$$M_i=\prod_{j=1}^{n}a_{ij}$$

步骤 2　计算 $M_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的 n 次方根为

$$\bar{w}_i=\sqrt[n]{M_i}$$

步骤 3　求出特征向量。

由于第 j 个指标的权重系数为

$$w_i=\bar{w}_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i \tag{16-6}$$

则 m 个指标的权重向量为

$$W=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$$

则加权规范决策矩阵为

$$\tilde{\tilde{Z}}=([z_{ij}^{-},z_{ij}^{*},z_{ij}^{+}])_{n\times m} \tag{16-7}$$

其中，$[\bar{\bar{Z}}_{ij}]=[z_{ij}^{-},z_{ij}^{*},z_{ij}^{+}]=w_j\cdot[r_{ij}^{-},r_{ij}^{*},r_{ij}^{+}]\ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$。

16.2.2　三元区间数的投影排序模型

多属性决策中，决策者要对模糊事件的大小进行排序。目前，常见的排序方法大致可以分为两类：一类是利用某种映射关系将模糊数转化成一个确定测度值，其优点是能够保持其排序的传递性，但将模糊数转化成确定数会丢失大量的信息；另一类是将模糊数进行两两比较，并由此提出一个基于模糊语言的比较结果，其优点是很好地保持了模糊数的不确定信息，但两两比较时，很难保持排序的一致性[95]。所以，为了更有效地解决模糊决策问题中的排序问题，本章提出投影排序的概念。

定义 16.1　称 $\tilde{Z}^{+}=\left\{\tilde{z}_1^{+},\tilde{z}_2^{+},\cdots,\tilde{z}_m^{+}\right\}$ 为三元区间理想点，有

$$\begin{aligned}\tilde{z}_j^{+}&=[z_j^{-+},z_j^{*+},z_j^{++}]\\&=[\max_i z_{ij}^{-},\max_i z_{ij}^{*},\max_i z_{ij}^{+}]\end{aligned} \tag{16-8}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m$。

定义 16.2　设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{aligned}P_\beta(\alpha)&=\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j^2}}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2}\\&=\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j^2}}\end{aligned} \tag{16-9}$$

其中，$P_\beta(\alpha)$ 为 α 在 β 上的投影，一般来说，$P_\beta(\alpha)$ 值越大，表明向量 α 和 β 之间越接近。

依据定义 16.2 和三元区间数理论来构建基于三元区间数的多指标决策投影排序模型。令

$$P_{\tilde{Z}^+}(\tilde{Z}_i)=\frac{\sum_{j=1}^{m}(z_{ij}^- z_j^{-+}+z_{ij}^* z_j^{*+}+z_{ij}^+ z_j^{++})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}[(z_j^{-+})^2+(z_j^{*+})^2+(z_j^{++})^2]}} \tag{16-10}$$

其中，$\tilde{Z}_i=\{z_{\tilde{i1}},z_{\tilde{i2}},\cdots,z_{\tilde{im}}\}^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$。

基于三元区间数的投影排序模型为

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} P_{\tilde{Z}^+}(\tilde{Z}_i) \tag{16-11}$$

依据三元区间数的排序准则，利用 $P_{\tilde{Z}^+}(\tilde{Z}_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 对决策方案进行排序和择优。显然 $P_{\tilde{Z}^+}(\tilde{Z}_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 值越大，表明方案 x_i 越接近三元区间型理想点 $\tilde{Z}^+$，因此方案 x_i 越优。

16.3　投影排序模型的应用分析

本章采用第 11 章的案例分析来进行应用研究。具体计算步骤如下：

步骤 1　建立决策矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}
[0.5,0.6,0.7] & [0.63,0.65,0.7] & [0.26,0.28,0.32] & [0.61,0.63,0.65] & [10,12,15]\\
[0.6,0.7,0.75] & [0.55,0.62,0.68] & [0.3,0.33,0.35] & [0.52,0.53,0.57] & [12,18,20]\\
[0.55,0.6,0.65] & [0.58,0.63,0.69] & [0.28,0.32,0.34] & [0.53,0.54,0.55] & [20,22,25]\\
[0.6,0.65,0.7] & [0.61,0.67,0.69] & [0.21,0.23,0.25] & [0.51,0.55,0.58] & [16,18,23]\\
[0.55,0.65,0.7] & [0.65,0.68,0.7] & [0.2,0.25,0.27] & [0.52,0.53,0.56] & [15,17,23]
\end{bmatrix}$$

步骤 2　决策矩阵标准化处理得

$$R=\begin{bmatrix}
[0.0,0.0,0.5] & [0.8,0.5,1.0] & [0.3,0.4,0.5] & [1.0,1.0,1.0] & [1.0,1.0,1.0]\\
[1.0,1.0,1.0] & [0.0,0.0,0.0] & [0.0,0.0,0.0] & [0.0,0.1,0.2] & [0.4,0.5,0.8]\\
[0.0,0.0,0.5] & [0.3,0.4,0.5] & [0.1,0.1,0.2] & [0.0,0.1,0.2] & [0.0,0.0,0.0]\\
[0.5,0.5,1.0] & [0.5,0.6,0.83] & [0.9,1.0,1.0] & [0.0,0.2,0.3] & [0.2,0.4,0.4]\\
[0.5,0.5,1.0] & [1.0,1.0,1.0] & [0.8,0.8,1.0] & [0.0,0.1,0.1] & [0.3,0.3,0.5]
\end{bmatrix}$$

步骤 3　由式(16-5)知权重向量为

$$W=(0.18,0.21,0.16,0.22,0.23)$$

步骤 4　由式(16-7)得三元区间数的加权标准决策矩阵为

$$B=\begin{bmatrix} [0,0,0.09] & [0.105,0.168,0.21] & [0.48,0.64,0.80] & [0.22,0.22,0.22] & [0.23,0.23,0.23] \\ [0.18,0.18,0.18] & [0,0,0] & [0,0,0] & [0,0.02,0.05] & [0.092,0.165,0.184] \\ [0,0,0.07] & [0.063,0.084,0.105] & [0.016,0.016,0.032] & [0,0.022,0.044] & [0,0,0] \\ [0.09,0.09,0.18] & [0.105,0.126,0.174] & [0.14,0.16,0.18] & [0,0.044,0.066] & [0.016,0.092,0.092] \\ [0.09,0.09,0.18] & [0.21,0.21,0.21] & [0.128,0.14,016] & [0,0.022,0.022] & [0.069,0.069,0.175] \end{bmatrix}$$

步骤 5　由式(16-8)知三元区间数理想点为

$$\tilde{Z}^{+}=\{[0.18,0.18,0.18],[0.21,0.21,0.21],[0.14,0.16,0.16],$$
$$[0.22,0.22,0.22],[0.23,0.23,0.23]\}$$

步骤 6　由式(16-10)知

$$P_{\tilde{Z}^{+}}(\tilde{Z}_1)=0.486,\quad P_{\tilde{Z}^{+}}(\tilde{Z}_2)=0.468,\quad P_{\tilde{Z}^{+}}(\tilde{Z}_3)=0.472$$
$$P_{\tilde{Z}^{+}}(\tilde{Z}_4)=0.496,\quad P_{\tilde{Z}^{+}}(\tilde{Z}_5)=0.518$$

所以,有

$$方案\,5\succ方案\,4\succ方案\,1\succ方案\,3\succ方案\,2$$

即方案 5 为最佳方案。

应用结果说明:依据投影排序机理,本章提出的基于层次分析法和三元区间数的投影排序模型,可以利用投影值的大小对决策方案进行排序择优。并通过实例分析说明了投影决策模型算法的合理性、科学性以及可操作性。该法对丰富多指标决策理论有一定的实际意义和理论价值。

第 17 章　基于三元区间数的公交线网优化研究

在考虑信息不完全的情况下，用三元区间数对公交线网优化问题进行了研究。在给出了公交线网优化的约束条件与优化目标的基础上，利用三元区间数建立了公交线网优化的决策模型。并依据三元区间数的基本知识，利用三元区间数参与优化决策过程，在允许参数在一定范围内变化的情况下，计算得到的优化结果是一个区间向量，其中向量值最大的为所求结果，所以三元区间数理论适用于城市公交线网的优化问题。

17.1　问题描述

公交线网优化不仅要符合城市当前客流分布的规律，而且要反映城市未来发展的交通变化，所以公交线网的优化是一个复杂的过程，存在许多不确定因素，很难用定量分析来建立一个定量优化模型，即具有不确定性。目前存在许多关于公交线网优化的定量模型，这些成果对城市公交线网体系优化做出了重要的贡献，但这些模型也有不够完美的地方，即没有考虑公交线路的线路重复、线路的发车频率、资金最佳利用、可持续发展等问题。在公交线网优化中也不易基于大量数据的方法进行优选，因为有些信息是已知的，有些信息是未知的，还有一些是介于已知和未知之间的"灰色信息"。所以公交线网优化是一个同时具有灰色性和模糊性的不确定性问题，可用系统科学的知识，在定量分析的基础上，利用不确定性数学理论进行优化建模。由于三元区间数是在信息不完全的情况下对有模糊因素的事物进行优化决策，不像通常的优化那样采用一个固定的数值，是一个区间参与了优化决策，允许参数在一定范围内变化，计算后得到的结果是一个区间数的向量，其中向量值最大的为所求结果，适合于城市公交线网优化决策的研究。

公交线网优化是以公交乘客分布量为依据，以方便居民出行为目的，在兼顾公交企业利益的基础上，用现代化的交通规划理论，在现有城市道路系统和公共交通运力的基础上，对城市公交线网进行合理布局，对现有公交运力进行优化组合，最大限度地发挥系统的最佳效益，最终目的是为城市居民提供安全、高效、经济、方便和舒适的出行服务，提高公交运营效率，促进公交的发展，还要建立良好的城市交通环境，推动土地的开发利用。所以在对城市公交线网系统综合分析的基础上，结合各城市的具体情况，提出了以居民出行时间、线网覆盖率、乘客直达率、线网效率、线网日均满载率、公交企业效益作为公交线网优化的目标函数。6 个目标函数

的取值区间见表 17-1。

表 17-1 目标函数的区间值

目标函数	居民总出行时间/min	线网覆盖率/%	乘客直达率/%	线网效率/%	污染物排放率/%	公交企业效益/(人数/车数)
$[a_j^-,a_j^+]$	[25,60]	[56,78]	[79,92]	[58,87]	[36,81]	[800,1200]

17.1.1 目标函数的优化

为了对城市公交系统进行定量评价研究，利用主成分分析法选取以下 6 个指标作为优化目标。

(1) 乘客平均总出行时间：

$$f(\text{time}) = k_1T_1 + k_2T_2 + k_3T_3 + k_4T_4 + k_5T_5 \tag{17-1}$$

其中，T_1 为每位乘客从出行点到相应车站的平均步行时间；T_2 为从出行点到相应车站后的平均候车时间；T_3 为中转换乘的平均时间；T_4 为车辆行驶的平均时间；T_5 为下车后乘客步行到达目的地的平均时间；k_1、k_2、k_3、k_4、k_5 为修正系数，采用五级标度法确定。

(2) 乘客直达率[97]：

$$f(\text{nonstop}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} D_{ij} \tag{17-2}$$

其中，q_{ij} 为线路起终点 (i,j) 之间直达乘客量(人次)；D_{ij} 为交通小区 i 至交通小区 j 间的 O-D 量(人次)；n 为通行公交车辆的道路网节点数；m 为交通小区总数。

(3) 线网日均满载率：

$$f(\text{carry}) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n-1} q_{i,i+1,k} L_{i,i+1,k} \Big/ \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n-1} q_{0,i,i+1,k} L_{i,i+1,k} \tag{17-3}$$

其中，$q_{i,i+1,k}$ 为第 k 条线路的节点 i 至 $i+1$ 路段客流量(人次)；$q_{0,i,i+1,k}$ 为第 k 条线路的节点 i 至 $i+1$ 路段车容量；$L_{i,i+1,k}$ 为第 k 条线路的节点 i 至 $i+1$ 路段客流量间距离(km)；N 为公交线路数。

(4) 污染物排放率：

$$f(\text{pollution}) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n-1} q_{i,i+1,k} l_{i,i+1,k} \sigma(v_{jk}) \Big/ \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n-1} q_{i,i+1,k} l_{i,i+1,k} \sigma_0(v_{jk}) \tag{17-4}$$

其中，$j=1,2,3,4$ 分别表示 CO、CO_2、NO_x 和 HC；$l_{i,i+1,k}$ 为第 k 条线路的节点 i 至 $i+1$ 路段的长度；$\sigma(v_{jk})$ 为第 k 条线路上的车速 v_k 行使情况下第 j 种污染物的实际排放浓度(mg/m³)；$\sigma_0(v_{jk})$ 为第 k 条线路上的车速 v_k 行使情况下第 j 种污染物的排放标准浓度(mg/m³)。

(5) 公交企业经济效益(每日产出的总人公里与每日投入的总车公里之比)：

$$f(\text{income}) = c_1/(c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7) \tag{17-5}$$

其中，c_1 为公交公司年均经济收入(万元)；c_2 为年均公交网络建设费用(万元)；c_3 为年均公交网络维修费用(万元)；c_4 为年均公交车辆购置费用(万元)；c_5 为年均公交车辆维修费用(万元)；c_6 为年均工作人员工资福利等费用(万元)；c_7 为年均公交公司其他费用(万元)。

(6) 线网效率(线网的系统效益与线网的系统费用之比)[97]：

$$f(\text{efficiency}) = \sum_{i,j,k\in \mathbf{R}} l_k\, q_{i,j,k} \Big/ \sum_{k\in \mathbf{R}} l_k\, \delta_{i,j,k} \tag{17-6}$$

其中，$q_{i,j,k}$ 为线路 k 从站点 i 至站点 j 的客流量；$\delta_{i,j,k}$ 为经过节点 i 至节点 j 的客运需求量在路线 k 上的分配的比例；R 为所有公交线路的集合；l_k 为线路 k 的长度。

17.1.2 主要约束条件

公交线网优化是一个复杂的过程，考虑因素较多，所以在线网优化中必须要有一定的约束条件加以限制，否则其优化过程与实际情况会有很大差别。通过实际分析和现场调研，得到如下约束条件：

(1) 非直线系数：

$$\rho = l/d$$

其中，l 为其他型线路的长度(km)；d 为线路起、终点站间空间直线距离(km)。

(2) 线路客流量不均匀系数[97]：

$$e = O/q$$

其中，O 为线路中最大断面客流量；q 为平均断面客流量。

(3) 乘客平均转换次数：

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n}$$

其中，n 为出行总人数；v_i 为第 i 位出行者的换乘次数。

(4) 线路负载效率系数：

$$\eta = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{2}(q_k L_k)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i,i+1} + q_{i+1,i})\cdot l_{i,i+1}\right]\right\}$$

其中，$q_{i,i+1}$ 为第 k 条线路上第 i 个和第 $i+1$ 个站点之间两个方向的客流量；$q_{i+1,i}$ 为第 k 条线路上第 $i+1$ 个和第 i 个站点之间两个方向的客流量；$l_{i,i+1}$ 为第 k 条线路上第 i 个和第 $i+1$ 个站点之间的线路长度；q_k 为第 k 条线路上的最大流量；L_k 为第 k 条线路的长度；n 为第 k 条线路上站点的总数；m 为路网的线路条数。

(5) 总步行时间：

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

其中，n 为出行总人数；s_i 为第 i 位出行者的步行时间。

17.2　公交线网优化的数学原理

综合灰色数学和模糊数学的优点，依据三元区间数的基本定义，提出了用三元区间数表示灰色模糊数。三元区间数是在信息不完全的情况下，对有模糊因素影响的事物或现象进行综合分析研究。三元区间数的综合决策是用区间参与了分析过程，而不像通常评判采用一个固定的数值，这样可以允许参数在一定范围内变化，计算后得到的结果是一个区间数的向量，其中向量值最大的为所求的结果。因为交通系统是一个复杂系统，里面包含许多未知因素。所以，在公交线网系统中既有已知的信息，也有未知的信息，而更多的是介于已知和未知之间的模糊信息，即灰色信息。因此三元区间数适用于城市公交线网的优化问题。

17.2.1　决策矩阵的建立

为了用三元区间数对公交线网进行优化决策分析，用函数对 6 个目标函数进行定量分析计算，把计算得到的数值作为三元区间数的特元，然后依据表 17-1 即可知道目标函数的区间值，从而由重心和区间值构成城市公交线网优化的三元区间数。

某城市为了对现有公交线网系统进行优化调整，有关部门提出了 n 个待选的决策方案，记为 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$。以 6 个目标函数作为评价方案优劣的指标集，记为 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_6\}$={公交企业经济效益，污染物排放率，线网效率，乘客直达率，乘客总出行时间，线网日均满载率}。决策矩阵表示因素集和备选集之间的映射关系，即根据某个因素给出对象对备选集中各元素的隶属度，所以用灰色模糊数表示的决策矩阵为

$$\widetilde{\widetilde{A}} = ([a_{ij}^-, a_{ij}^*, a_{ij}^-])_{n\times 6}$$

其中，$[a_{ij}^-, a_{ij}^*, a_{ij}^+]$$(i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,6)$ 为考察值，为备择方案 A_i 对因素 G_j 的属性值；a_{ij}^-、a_{ij}^+ 分别为表 17-1 中对应的区间值；a_{ij}^* 为相应目标函数计算值。

由于 6 个目标函数的计算方法和量纲单位不同，无法进行统一度量，需将决策矩阵 $\widetilde{\widetilde{A}} = ([a_{ij}^-, a_{ij}^*, a_{ij}^+])_{n\times 6}$ 标准化处理。在 6 个目标函数中除乘客平均总出行时间为极小型指标外，其余均为极大型指标，所以通过下列方法把极小型指标变为极大型指标。

令

$$[b_{ij}^-,b_{ij}^*,b_{ij}^+]=\left[\frac{1}{a_{ij}^+},\frac{1}{a_{ij}^*},\frac{1}{a_{ij}^-}\right],\quad j=5$$

将决策矩阵 $\tilde{\tilde{A}}=([a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+])_{n\times 6}$ 进行标准化处理，则标准决策矩阵为

$$\tilde{\tilde{R}}=\begin{bmatrix}[r_{11}^-,r_{11}^*,r_{11}^+] & [r_{12}^-,r_{12}^*,r_{12}^+] & \cdots & [r_{16}^-,r_{16}^*,r_{16}^+]\\ [r_{21}^-,r_{21}^*,r_{21}^+] & [r_{22}^-,r_{22}^*,r_{22}^+] & \cdots & [r_{26}^-,r_{26}^*,r_{26}^+]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [r_{n1}^-,r_{n1}^*,r_{n1}^+] & [r_{n2}^-,r_{n2}^*,r_{n2}^+] & \cdots & [r_{n6}^-,r_{n6}^*,r_{n6}^+]\end{bmatrix}\tag{17-7}$$

其中，$[r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+]=[a_{ij}^-,a_{ij}^*,a_{ij}^+]/\|A_j\|\ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,3,4,5,6)$。即为

$$\tilde{\tilde{R}}=([r_{ij}^-,r_{ij}^*,r_{ij}^+])_{n\times 6}\tag{17-8}$$

17.2.2　权重向量的确定

权重向量表示各影响因素在决策过程中的重要性程度。在决策中所获信息的多少是决策结果和可靠性大小的决定因素之一。由于各指标在决策中所起的作用不同，所以可根据各指标对决策问题的重要性程度，基于三元区间数把所有指标决策值划分为 5 个级别，见表 17-2。

表 17-2　指标级别

等级	一级	二级	三级	四级	五级
属性	特别重要	极重要	较重要	重要	一般
取值范围	[0.9,0.95,1.0)	[0.8,0.85,0.9)	[0.7,0.75,0.8)	[0.6,0.65,0.7)	[0.5,0.55,0.6)

五级标度法的基本原理如下：由于决策问题中的指标，在不同情况下所起的作用不同，所以它在不同的情况下属于不同区间的级别。因此在具体的决策问题中，结合实际情况就可以得到不同指标的级别，并依据三元区间数的基本知识，就可以根据指标级别的取值范围得到指标 G_j 的初始权重区间值 $[\bar{\bar{Z}}_j]=[z_j^-,z_j^*,z_j^+]$ $(j=1,2,\cdots,6)$。

然后运用模糊数学中的有关知识，将它模糊处理，令

$$[\bar{\bar{W}}_j]=([\bar{\bar{Z}}_j]-[\bar{\bar{a}}])/([\bar{\bar{b}}]-[\bar{\bar{a}}]),\quad j=1,2,\cdots,6\tag{17-9}$$

一般情况下，经验系数取 $[\bar{\bar{a}}]=[0.5,0.5,0.5]$，$[\bar{\bar{b}}]=[1.0,1.0,1.0]$，则 6 个目标函数的权重区间向量

$$[\vec{\bar{\bar{W}}}]=([w_1^-,w_1^*,w_1^+],[w_2^-,w_2^*,w_2^+],\cdots,[w_6^-,w_6^*,w_6^+])\tag{17-10}$$

$$\text{s. t.}:\sum_{i=1}^{6} w_i^- \leqslant 1,\sum_{i=1}^{6} w_i^* = 1,\sum_{i=1}^{6} w_i^+ \geqslant 1, w_i^- > 0, w_i^* > 0, w_i^+ > 0$$

其中，$[\bar{\bar{W}}_j]=[w_j^-, w_j^*, w_j^+]$。

17.2.3　三元区间数的组合计算

根据权重向量 $[\vec{\bar{\bar{W}}}]$ 和标准决策矩阵 $\tilde{\tilde{R}}=([r_{ij}^-, r_{ij}^*, r_{ij}^+])_{n\times 6}$ 进行综合决策，得到的结果是一个由三元区间数构成的向量，即

$$[\vec{\bar{\bar{B}}}]=[\vec{\bar{\bar{W}}}]\cdot\tilde{\tilde{R}}$$
$$=([b_1^-, b_1^*, b_1^+],[b_2^-, b_2^*, b_2^+],\cdots,[b_n^-, b_n^*, b_n^+]) \qquad (17\text{-}11)$$

17.2.4　三元区间数的排序

从三元区间数构成的向量中选出最优的方案，就需要将 $[\vec{\bar{\bar{B}}}]$ 中的各三元区间数按照一定的方法进行排序，得到的最优三元区间数对应的方案即为最优方案。

定义 17.1　依据参考文献[98]，设有两个三元区间数 $[\bar{\bar{C}}]=[c^-, c^*, c^+]$ 和 $[\bar{\bar{D}}]=[d^-, d^*, d^+]$，且

$$p_{cd}=\frac{c^-+c^*+c^+}{d^-+d^*+d^+}$$

则有[98]

(1) 当 $c^-=d^-, c^*=d^*, c^+=d^+$ 同时成立时，称 $[\bar{\bar{C}}]$ 与 $[\bar{\bar{D}}]$ 相等，记为 $[\bar{\bar{C}}]=[\bar{\bar{D}}]$。

(2) 当 $c^*\neq d^*$ 且 $p_{cd}>0.5$ 时，认为 $[\bar{\bar{C}}]>[\bar{\bar{D}}]$。

(3) 当 $c^*\neq d^*$ 且 $p_{cd}=0.5$ 时，认为 $[\bar{\bar{C}}]$ 等价于 $[\bar{\bar{D}}]$。

(4) 当 $c^*\neq d^*$ 且 $p_{cd}<0.5$ 时，认为 $[\bar{\bar{C}}]<[\bar{\bar{D}}]$。

所以对 $[\vec{\bar{\bar{B}}}]$ 中的各三元区间数进行两两比较排序，得到以下的排序可能性矩阵：

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \tag{17-12}$$

其中，p_{ij} 为第 i 个三元区间数大于第 j 个三元区间数的可能性大小。

通过式(17-12)可以看出两两方案之间的比较结果，并根据是否 $p_{ij}\geqslant 0.5$ 进行排序，最后利用匈牙利算法得到最佳方案。

17.3 模型应用分析

2005 年某市根据现有的公交线路网络，在考虑城市发展的基础上，某交通研究所提出 4 种公交线网的优化调整方案 v_1、v_2、v_3、v_4，要求有关部门从中选出一种最佳的优化方案。根据所提供的数据，首先利用上述约束条件对 4 种方案进行考查，见表 17-3。

表 17-3　约束条件考查值

实际约束数	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4
线路非直线系数/%	1.29	1.35	1.40	1.37
线路客流量不均匀系数/%	1.32	1.43	1.47	1.48
乘客平均转换次数/%	1.80	2.20	1.90	2.00
线路负载效率系数/%	0.73	0.79	0.68	0.72
总步行距离/m	7.00	6.90	7.50	6.50

由表 17-3 可知，4 种优化方案都能满足城市公交线网优化的约束条件。按照上述 6 个目标函数的定义对各方案的指标进行考察，见表 17-4。

表 17-4　指标考查值

方案	线网日均满载率/%	污染物排放率/%	线网效率/%	乘客直达率/%	乘客出行时间/min	公交企业效益/(人数/车数)
方案 1	[36,52,81]	[56,65,78]	[58,68,87]	[79,83,92]	[25,41,60]	[800,982,1200]
方案 2	[36,63,81]	[56,62,78]	[58,73,87]	[79,86,92]	[25,52,60]	[800,1082,1200]
方案 3	[36,58,81]	[56,71,78]	[58,72,87]	[79,81,92]	[25,38,60]	[800,998,1200]
方案 4	[36,71,81]	[56,67,78]	[58,78,87]	[79,85,92]	[25,48,60]	[800,1068,1200]

步骤 1　建立评价矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}[36,52,81] & [56,65,78] & [58,68,87] & [79,83,92] & [25,41,60] & [800,982,1200]\\ [36,63,81] & [56,62,78] & [58,73,87] & [79,86,92] & [25,52,60] & [800,1082,1200]\\ [36,58,81] & [56,71,78] & [58,72,87] & [79,81,92] & [25,38,60] & [800,998,1200]\\ [36,71,81] & [56,67,78] & [58,78,87] & [79,85,92] & [25,48,60] & [800,1068,1200]\end{bmatrix}$$

步骤 2　将决策矩阵标准化得

$$R=\begin{bmatrix}[0.44,0.64,1] & [0.72,0.83,1] & [0.67,0.78,1] & [0.86,0.90,1] & [0.42,0.61,1] & [0.67,0.82,1]\\ [0.44,0.78,1] & [0.72,0.79,1] & [0.67,0.84,1] & [0.86,0.93,1] & [0.42,0.48,1] & [0.67,0.90,1]\\ [0.44,0.72,1] & [0.72,0.91,1] & [0.67,0.83,1] & [0.86,0.88,1] & [0.42,0.66,1] & [0.67,0.83,1]\\ [0.44,0.88,1] & [0.72,0.86,1] & [0.67,0.90,1] & [0.86,0.92,1] & [042,0.52,1] & [0.67,0.89,1]\end{bmatrix}$$

步骤 3　由五级标度法确定权重向量。

由表 17-1 可得到各指标的权重区间值见表 17-5。

表 17-5　权重区间值

方案	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
等级	二级	三级	三级	三级	二级	三级
$[\bar{z}_j]$	[0.85,0.87,0.88]	[0.71,0.73,0.74]	[0.73,0.74,0.75]	[0.76,0.77,0.78]	[0.86,0.88,0.89]	[0.76,0.78,0.79]
$[\bar{w}_j]$	[0.70,0.73,0.76]	[0.42,0.45,0.48]	[0.46,0.47,0.48]	[0.52,0.54,0.56]	[0.72,0.76,0.78]	[0.52,0.56,0.58]

步骤 4　由式(17-10)知三元区间数向量为

$$[\vec{\bar{B}}]=([0.6190,0.7726,0.9103],[0.5220,0.6511,0.7774],$$
$$[0.6573,0.8004,0.9513],[0.6095,0.7376,0.8610])$$

步骤 5　对各三元区间数进行两两排序比较，得排序可能性矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} - & 0.9495 & 0.1834 & 0.6862\\ 0.1062 & - & 0.0828 & 0.2988\\ 0.8581 & 0.9998 & - & 0.9162\\ 0.2831 & 0.8283 & 0.0921 & -\end{bmatrix}$$

步骤 6　从矩阵 P 中可看出：

$$p_{12}=0.9495,\quad p_{31}=0.8581,\quad p_{14}=0.6862$$
$$p_{32}=0.9998,\quad p_{42}=0.8283,\quad p_{34}=0.9162$$

因此，依据三元区间数的排序准则，4 种方案的优劣排序为

$$v_3 \succ v_1 \succ v_4 \succ v_2$$

即方案 v_3 最佳。

应用结果表明：在依据不确定性数学理论对公交线网优化目标进行量化的基础上，并利用五级标度法确定优化目标的权重系数的情况下，所建立的公交线网优化模型，不但克服了以往公交线网优化中对于权重取值的主观性，而且计算过程科学、合理，能够得到最佳优选方案。

第 18 章 基于三元区间数的公交系统综合测度模型

针对城市公交系统的发展态势问题，利用可拓学中的物元分析理论和区间数理论中的三元区间数进行了定量研究。在考虑城市公交系统多种因素的基础上，构建了城市公交系统综合测度的指标体系，并用强弱准则对测度指标进行了有效性检验。利用定量分析为主、定性分析和定量分析相结合的方法，将信息熵、隶属函数和复合物元有机地结合起来，建立了城市公交系统综合测度的复合物元模型。最后利用三元区间数知识，首先在将信息熵用三元区间数表示的基础上，提出基于三元区间数的信息熵确定测定指标的权重系数。并通过计算复合物元，将公交系统的多层次测定转化为单级测定，并用定量的数值来表示测度结果，该测度值能够简明确切地反映出城市公交系统发展现状水平。应用结果表明复合物元模型计算过程简单、实用性强，同时也为多层次多目标测定问题提供了一种合理可行的测度方法。

18.1 问题描述

城市公共交通是城市复杂系统的重要组成部分，它对繁荣城市经济、促进城市交通发展、方便城市居民出行起着十分重要的作用。通过对城市公交系统发展态势问题研究，可以优化城市用地布局，有效地提高交通效率、减少交通事故、降低环境污染，为居民提供迅速方便、安全高效、经济舒适、准点和低公害的交通条件[97]。由于测度是一定标度下，对事物某种属性的定量计算，所以城市公交系统综合测度是将现有公交系统布局进行综合研究，分析其特点，测度其布局的合理性，总结其布局的经验和教训，为今后公共交通系统的调整优化提供科学合理的决策依据。在测度城市公交系统时，本章采取多目标原则，对影响城市公交系统的各个方面进行定量计算和定性分析，在确定测度准则的基础上，综合研究整个城市公交系统发展的态势。通过综合测度不但可以清楚地认识到公交服务现状与社会需求的差距大小，而且可以通过调整公交产业结构来提高公共交通系统的服务水平，促进城市交通可持续发展。

国内外对城市公交系统的测度有两类：一类是定性的研究，在对城市公交系统部分功能进行简单分析的基础上，通过建立一些定性的函数模型，对城市公交系统进行定性研究。缺点是主观性大，得到的结果不能很好地反映客观实际需要。另一类是纯理论的研究，在对城市公交系统进行抽象简化分析的基础上，通过建立一

些简单的数学模型对整个公交系统进行测度。缺点是由于公交系统的复杂性，在建立数学模型时忽略了许多关键因素，最后建立的模型具有片面性，通用性差。可拓学中的物元模型和以可拓集合理论为基础的多指标可拓综合分析法，是由我国可拓学工作者创造的多元数据量化决策的一种新方法。该方法通过建立多指标性能参数的质量综合评判的物元分析模型，在以定量的数值表示评定结果的基础上，完整地反映它的综合水平[8]。但多指标可拓综合分析方法计算过程复杂，采用层次分析法确定测度指标权重时误差大、实用性差。由信息论可知，人们在决策中获得信息的数量和质量是决策的精度和可靠性大小的决定因素之一，所以熵是应用于不同决策过程评价的一个理想尺度。因此，依据信息熵理论，并结合灰色系统中的关联度知识，在将多元数据量化决策的多指标可拓综合分析方法进行改进的基础上，对影响因子较多的城市公交系统进行综合测度，是一个值得进行的探索。笔者在分析公交系统的多种影响因素，并确定测度因子的基础上，根据公交系统的发展态势，按照物元分析理论与信息熵理论，建立了城市公交系统综合测度的复合物元模型，通过计算复合物元，给出定量的数值评定结果，来直观全面地衡量城市公交系统可持续发展的和谐状态，从而为决策者提供了客观、公正、准确、合理的决策依据。同时，由于利用关联熵来确定指标的权重系数，所以复合物元模型比较合理地解决了城市公交系统测度中的信息不完全、测度指标较多、部分指标之间存在相差或重复的问题。

18.2 城市公交系统的强弱检验准则

城市公共交通作为人们生活中的基本组成部分，对保证社会经济和日常生活正常运转发挥着至关重要的作用。城市公交系统的要素包括流动的人、行驶的车、变化的路，是一个非常复杂的系统。测度现有公交网络的运行状况，找出存在的问题及可能发挥的潜力，把握公交总体发展水平，可以为公交进一步发展提供规划、建设、管理等方面的依据，对整个城市交通系统管理将起到积极的推动作用[99]。因此，必须建立一套科学、实用的公交系统测度指标体系。

18.2.1 测度指标的选取原则与设置功能

测度是一些归类的指标按照一定的规则和方法，对评判对象从其某一方面或多方面或全面的综合状况做出优劣测度。城市公共交通系统是一个非常复杂的系统，它的复杂性表现在：一方面构成要素多样化，包括运输对象、运输工具（各种车辆）、交通设施；另一方面多种外部关系（如社会活动系统、资源系统、环境系统等）存在紧密联系。所以，城市公交系统的测度涉及许多领域和行业。一方面城市公交系统测度的目的是改善居民出行程度，推动城市结构的合理调整以及改善城市的生活环境；另一方面城市公交系统的测度指标应该能够独立反映城市公交系统

某一具体方面的特征，并与公交网络的其他因素相联系。因此，测度指标体系的建立应遵循科学性原则、可比性原则、可操作性原则、系统性原则、代表性原则。

城市公交系统综合测度是以公共交通系统为主要研究对象，借助科学方法和手段，在对公共交通系统的目标、结构、环境、功能、效益等要素进行分析的基础上，构建指标体系，并建立综合测度模型。所以，一个科学、客观的城市公交系统测度指标体系有助于了解城市交通发展现状，有助于制定城市交通发展规划，有助于对城市交通发展进行监测和解释。因此，城市公交系统的测度指标体系应具有判断功能、规划功能、决策功能。

18.2.2　城市公交系统的测度指标体系

城市公交系统的测度指标体系是描述、测度城市公交系统的重要依据。所以，作为测度体系：首先，它能够衡量一个城市公交系统不同时期交通发展程度的变化；其次，它能够测度同一时期不同城市公交系统发展水平的差异；最后，它可以分析城市交通问题的关键症结和严重程度，以提出对症下药的治理方案。所以，以选取原则为依据、以设置功能为目标，通过综合分析和考察，笔者构建的城市公交系统测度指标体系，见表 18-1。

表 18-1　城市公交系统的测度指标体系

名称	一级指标	二级指标		指标含义
城市公交系统的测度指标体系	网络技术性能	C_1	公交线网密度	反映居民接近公交线路的程度
		C_2	路线重复系数	反映公交线路运力的浪费程度
		C_3	公交站点覆盖率	反映公交服务能力的程度
		C_4	内部收益率	反映公交企业生产运营的综合指标
	环境影响程度	C_5	能源消耗系数	反映公交系统对能源的消耗程度
		C_6	生活质量系数	反映城市公交道路时空资源利用的程度
		C_7	噪声	反映公交系统对环境的污染情况
		C_8	废气系数	反映公交系统对环境的污染情况
	公交服务水平	C_9	公交车辆拥有率	反映公交发展水平和交通结构状况的指标
		C_{10}	客运周转量	反映公交的利用程度
		C_{11}	运营速度	反映公交车辆运送乘客的快慢程度
		C_{12}	换乘系数	反映乘车方便程度
	乘客满意程度	C_{13}	车辆满载率	反映运营车辆全天载运乘客的平均满载程度
		C_{14}	出行时耗系数	反映城市居民出行的快捷性
		C_{15}	行车准点率	反映公交车辆正点运行的程度
		C_{16}	安全系数	反映公交运营过程中的安全状况

18.2.3　测度指标的检验准则

根据城市公交系统的测度指标体系选取原则和设置功能，结合表 18-1 中城市公交系统测度指标体系，本章设计了 5 个等级强弱标准来描述每个测度指标在每一筛选原则下的实用性程度。以“＋”和“－”分别表示 16 个评价指标在每一选取原则中的强弱差别，用“√”表示测度指标具有的功能特征，见表 18-2。

表 18-2　测度指标检验

二级指标	科学性	可比性	可操作性	系统性	代表性	判断功能	规划功能	导向功能
C_1	+++++	+++−−	++++−	+++++	+++++	√	√	
C_2	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	√		√
C_3	++++−	++++−	++++−	+++++	+++++	√		√
C_4	++++−	++++−	+++++	++++−	+++++		√	√
C_5	+++++	++++−	+++++	++++−	+++++	√		√
C_6	++++−	+++−−	+++++	+++−−	++++−	√		√
C_7	+++++	++++−	+++++	+++−−	++++−	√	√	
C_8	+++++	++++−	++++−	+++−−	++++−	√	√	
C_9	++++−	++++−	+++++	+++−−	++++−		√	√
C_{10}	++++−	++++−	+++++	+++−−	++++−		√	√
C_{11}	+++++	++++−	+++++	+++−−	++++−	√	√	
C_{12}	++++−	++++−	++++−	+++−−	++++−	√	√	
C_{13}	++++−	++++−	++++−	+++−−	++++−	√		√
C_{14}	++++−	+++−−	++++−	+++−−	++++−	√	√	
C_{15}	+++−−	+++−−	+++−−	++++−	++++−	√		√
C_{16}	+++++	++++−	++++−	++++−	++++−		√	√

18.3　基于复合物元的公交系统综合测度模型

根据物元分析理论，要探讨城市公交系统发展态势，首先要分析该问题所涉及的各个因素，依据有关国家标准和相应的统计数据，给出各因素因子的量值，然后建立城市公交系统测度的复合物元分析模型，并以定量的数值表示评定的结果。但不同城市的公交系统影响其运行的指标因素很多，而且，测度指标用于公交系统测度时，具有一定的不确定性和模糊性。若用单一指标进行测度时，所得结果还可能具有矛盾性，因此，对不同公交系统的综合测度是一种多因素、模糊性的综合测

度[100]。基于以上原因，笔者采用物元理论和信息论，提出复合物元概念，建立城市公交系统的综合测度模型。

18.3.1　基本概念

定义 18.1　熵物元。物元指用有序三元组："事物、特征、模糊量值"来描述事物的基本元[9]。给定事物的名称 N，它的特征 C 及其量值 V 构成一个基本物元 $R=(N,C,V)$，如果量值 V 具有不确定性，便称其为熵物元。

如果事物 N 有 n 个特征 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 和对应的模糊量值 $V_1, V_2, \cdots, V_n$，称 R 为 n 维熵物元。

定义 18.2　复合物元。如果熵物元中事物为方案，特征为信息熵，则称为复合物元[100]，记为 $\underset{\sim H}{R}$。若复合物元中有 m 个方案，则为 m 个方案的复合物元，记为 $\underset{\sim mH}{R}$。

18.3.2　公交系统复合物元的构建

定义 18.3　城市公交系统的 n 维复合物元。如果有 m 个城市公交系统用 n 项测度指标及其相应量值来描述，则称其为 m 个城市公交系统的 n 维复合物元，记为 R_{mn}，即

$$R_{mn} = \begin{bmatrix} & M_1 & M_2 & \cdots & M_m \\ C_1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ C_2 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \tag{18-1}$$

其中，M_i 为第 i 个城市公交系统；C_j 为城市公交系统第 j 项测度指标，与其相应的量值用 x_{ij} 表示。

18.3.3　公交系统复合物元的标准化处理

由于各测度指标的含义不同，测度指标值的计算方法也不同，造成各个测度指标的量纲各异。因此，为了使各测度指标有公度性必须对其量值进行标准化处理。本章采用向量归一化处理。令

$$\mu_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}}}, \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \tag{18-2}$$

则标准化处理后 m 个公交系统的 n 维复合物元为

$$\underset{\sim mH}{R} = \begin{bmatrix} & M_1 & M_2 & \cdots & M_m \\ C_1 & \mu_{11} & \mu_{21} & \cdots & \mu_{m1} \\ C_2 & \mu_{12} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n & \mu_{1n} & \mu_{2n} & \cdots & \mu_{mn} \end{bmatrix} \tag{18-3}$$

18.3.4 公交系统测度指标权重系数的确定

由于客观事物的复杂性和不确定性，以及人类思维的模糊性，往往不能明确给出测度指标的权重信息。为了增大决策过程的客观性，本章采用关联熵法来确定各测度指标的权重系数。并将三元区间数应用于信息熵，提出用三元区间数表示的关联熵法，并用它来确定该测度指标的权重系数值，此值为三元区间数。

定义 18.4 复合物元的关联系数。

当 $y_j^- = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\mu_{ij}, y_j^* = \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_{ij}, y_j^+ = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\mu_{ij}, j = 1,2,\cdots,n$ 时，复合物元 $\underset{\sim mH}{R}$ 的第 j 项测度指标 C_j 基于三元区间数的关联系数为

$$\left[\overset{=}{\zeta}_{ij}\right] = [y_j^-, y_j^*, y_j^+] \tag{18-4}$$

由于熵是信息论中测度不确定性的函数，熵值越大，对应的信息量越大。所以由信息论可知，城市公交系统第 j 项测度指标 C_j 的熵为

$$\left[\overset{=}{F}_j\right] = -(\ln m)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left[\overset{=}{f}_{ij}\right]\ln\left[\overset{=}{f}_{ij}\right] \tag{18-5}$$

其中，$\left[\overset{=}{f}_{ij}\right] = \left[\overset{=}{\zeta}_{ij}\right] \Big/ \sum\limits_{i=1}^{m}\left[\overset{=}{\zeta}_{ij}\right](j = 1,2,\cdots,n; i = 1,2,\cdots,m)$。

定义 18.5 城市公交系统测度指标的权重系数。

令偏差度 $\left[\overset{=}{k}_j\right] = \left[\overline{\overset{=}{F}_j}\right]$，则城市公交系统第 j 项测度指标 C_j 的权重系数为

$$\left[\overset{=}{w}_j\right] = \left[\overset{=}{k}_j\right] \Big/ \sum_{j=1}^{n}\left[\overset{=}{k}_j\right] \tag{18-6}$$

定义 18.6 城市公交系统测度指标权重的复合物元。

由城市公交系统第 j 项测度指标 C_j 的权重系数 $\left[\overset{=}{w}_j\right]$，构造城市公交系统测度指标权重的复合物元为

$$R_{\left[\overset{=}{w}_j\right]} = \begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \left[\overset{=}{w}_j\right] & \left[\overset{=}{w}_1\right] & \left[\overset{=}{w}_2\right] & \cdots & \left[\overset{=}{w}_n\right] \end{bmatrix} \tag{18-7}$$

18.3.5　公交系统复合关联熵物元的确定

定义 18.7　城市公交系统综合测度的复合关联熵物元。

由式(18-3)、式(18-7)便可构成 m 个城市公交系统综合测度的复合关联熵物元 $\underset{\sim mH}{R}$，即

$$\underset{\sim mH}{R} = \begin{bmatrix} & M_1 & M_2 & \cdots & M_m \\ [\bar{\bar{H}}_i] & [\bar{\bar{H}}_1] & [\bar{\bar{H}}_2] & \cdots & [\bar{\bar{H}}_m] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\bar{\bar{H}}_i] & \\ -\sum_{j=1}^{n} p([\bar{\bar{w}}_j]\mu_{1j})\ln p([\bar{\bar{w}}_j]\mu_{1j}) & M_1 \\ -\sum_{j=1}^{n} p([\bar{\bar{w}}_j]\mu_{2j})\ln p([\bar{\bar{w}}_j]\mu_{2j}) & M_2 \\ \vdots & \vdots \\ -\sum_{j=1}^{n} p([\bar{\bar{w}}_j]\mu_{ij})\ln p([\bar{\bar{w}}_j]\mu_{ij}) & M_i \\ \vdots & \vdots \\ -\sum_{j=1}^{n} p([\bar{\bar{w}}_j]\mu_{mj})\ln p([\bar{\bar{w}}_j]\mu_{mj}) & M_m \end{bmatrix} \quad (18\text{-}8)$$

其中，$p([\bar{\bar{w}}_i]\mu_{ij}) = [\bar{\bar{w}}_i]\mu_{ij} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n}[\bar{\bar{w}}_j]\mu_{ij}\right]^{-1} (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$。

依据复合关联熵物元模型就可以得到第 i 个城市公交系统的综合测度值 $[\bar{\bar{H}}_i](i = 1,2,\cdots,m)$。并依据物元分析理论和三元区间数的排序关系知，$[\bar{\bar{H}}_i]$值越大表示该城市公交发展水平越好。所以，在根据 m 个城市公交系统的综合测度区间值 $[\bar{\bar{H}}_i]$ 来判断各个城市公交系统的发展态势基础上，并依据三元区间数的排序关系对 m 个城市公交系统进行大小排序分析。

18.4　应用分析

以 8 个地级城市(城市 M_1、城市 M_2、城市 M_3、城市 M_4、城市 M_5、城市 M_6、城市 M_7、城市 M_8)的城市公交系统为测度对象，应用复合物元模型进行综合测度。2006 年 5 月课题组通过现场调查，得到 8 个城市公交系统的基础数据资料，并通

过计算分析各测度指标的测度值，见表 18-3。

表 18-3 测度指标考察值

名 称	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
城市M_1	0.51	0.63	0.52	0.62	0.41	0.38	0.62	0.53	0.62	0.42	0.72	0.67	0.61	0.83	0.89	0.95
城市M_2	0.49	0.61	0.51	0.62	0.39	0.36	0.59	0.51	0.61	0.37	0.71	0.63	0.61	0.81	0.92	0.97
城市M_3	0.53	0.59	0.54	0.58	0.41	0.39	0.58	0.47	0.59	0.39	0.69	0.59	0.57	0.85	0.91	0.96
城市M_4	0.55	0.65	0.49	0.57	0.37	0.40	0.62	0.48	0.61	0.41	0.68	0.65	0.56	0.84	0.88	0.93
城市M_5	0.39	0.62	0.45	0.59	0.37	0.37	0.61	0.52	0.57	0.38	0.71	0.58	0.62	0.79	0.89	0.97
城市M_6	0.41	0.57	0.53	0.61	0.41	0.36	0.57	0.49	0.56	0.39	0.69	0.57	0.63	0.81	0.91	0.94
城市M_7	0.43	0.56	0.51	0.59	0.42	0.38	0.58	0.48	0.61	0.41	0.72	0.61	0.58	0.78	0.92	0.97
城市M_8	0.47	0.58	0.48	0.62	0.38	0.41	0.61	0.51	0.59	0.41	0.67	0.62	0.57	0.79	0.89	0.96

根据表 18-3 的基本数据建立城市公交系统的 $R_{公交}$ 复合关联熵物元和权重复合物元 $R_{[\bar{\bar{w}}_j]}$：

$$
\underset{\sim}{R}_{公交}=\begin{bmatrix}
 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & M_7 & M_8 \\
C_1 & 0.51 & 0.49 & 0.53 & 0.55 & 0.39 & 0.41 & 0.43 & 0.47 \\
C_2 & 0.63 & 0.61 & 0.59 & 0.65 & 0.62 & 0.57 & 0.56 & 0.58 \\
C_3 & 0.52 & 0.51 & 0.54 & 0.49 & 0.45 & 0.53 & 0.51 & 0.48 \\
C_4 & 0.62 & 0.62 & 0.58 & 0.57 & 0.59 & 0.61 & 0.59 & 0.62 \\
C_5 & 0.41 & 0.39 & 0.41 & 0.37 & 0.37 & 0.41 & 0.42 & 0.38 \\
C_6 & 0.38 & 0.36 & 0.39 & 0.40 & 0.37 & 0.36 & 0.38 & 0.41 \\
C_7 & 0.62 & 0.59 & 0.58 & 0.62 & 0.61 & 0.57 & 0.58 & 0.61 \\
C_8 & 0.53 & 0.51 & 0.47 & 0.48 & 0.52 & 0.49 & 0.48 & 0.51 \\
C_9 & 0.62 & 0.61 & 0.59 & 0.61 & 0.57 & 0.56 & 0.61 & 0.59 \\
C_{10} & 0.42 & 0.37 & 0.39 & 0.41 & 0.38 & 0.39 & 0.41 & 0.41 \\
C_{11} & 0.72 & 0.71 & 0.69 & 0.68 & 0.71 & 0.69 & 0.72 & 0.67 \\
C_{12} & 0.67 & 0.63 & 0.59 & 0.65 & 0.58 & 0.57 & 0.61 & 0.62 \\
C_{13} & 0.61 & 0.61 & 0.57 & 0.56 & 0.62 & 0.63 & 0.58 & 0.57 \\
C_{14} & 0.83 & 0.81 & 0.85 & 0.84 & 0.79 & 0.81 & 0.78 & 0.79 \\
C_{15} & 0.89 & 0.92 & 0.91 & 0.88 & 0.89 & 0.91 & 0.92 & 0.89 \\
C_{16} & 0.95 & 0.97 & 0.96 & 0.93 & 0.97 & 0.94 & 0.97 & 0.96
\end{bmatrix}
$$

$$
R_{[\bar{\bar{w}}_j]}=\begin{bmatrix}
[\bar{\bar{w}}_i] & \\
[0.062,0.063,0.066] & C_1\\
[0.061,0.063,0.065] & C_2\\
[0.062,0.064,0.065] & C_3\\
[0.061,0.064,0.067] & C_4\\
[0.062,0.063,0.064] & C_5\\
[0.061,0.063,0.065] & C_6\\
[0.060,0.062,0.065] & C_7\\
[0.063,0.064,0.066] & C_8\\
[0.062,0.064,0.067] & C_9\\
[0.061,0.063,0.067] & C_{10}\\
[0.062,0.064,0.065] & C_{11}\\
[0.061,0.063,0.064] & C_{12}\\
[0.060,0.062,0.063] & C_{13}\\
[0.060,0.064,0.065] & C_{14}\\
[0.061,0.063,0.065] & C_{15}\\
[0.062,0.063,0.066] & C_{16}
\end{bmatrix}
$$

依据式(18-2),把各测度指标的观测值进行标准化处理,则

$$
\underset{\sim}{R}_{公交}=\begin{bmatrix}
 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & M_7 & M_8\\
C_1 & 0.927 & 0.891 & 0.964 & 1.000 & 0.709 & 0.745 & 0.782 & 0.855\\
C_2 & 0.969 & 0.938 & 0.908 & 1.000 & 0.954 & 0.877 & 0.862 & 0.892\\
C_3 & 0.865 & 0.882 & 0.833 & 0.918 & 1.000 & 0.849 & 0.882 & 0.776\\
C_4 & 1.000 & 1.000 & 0.935 & 0.919 & 0.951 & 0.984 & 0.951 & 1.000\\
C_5 & 0.927 & 0.974 & 0.927 & 1.000 & 1.000 & 0.927 & 0.881 & 0.974\\
C_6 & 0.927 & 0.878 & 0.951 & 0.976 & 0.902 & 0.878 & 0.927 & 1.000\\
C_7 & 0.919 & 0.966 & 0.983 & 0.919 & 0.934 & 1.000 & 0.983 & 0.934\\
C_8 & 0.887 & 0.923 & 1.000 & 0.979 & 0.904 & 0.959 & 0.979 & 0.923\\
C_9 & 1.000 & 0.984 & 0.952 & 0.984 & 0.919 & 0.903 & 0.984 & 0.952\\
C_{10} & 1.000 & 0.881 & 0.923 & 0.976 & 0.905 & 0.923 & 0.976 & 0.976\\
C_{11} & 1.000 & 0.940 & 0.881 & 0.970 & 0.866 & 0.851 & 0.910 & 0.925\\
C_{12} & 1.000 & 0.986 & 0.958 & 0.944 & 0.986 & 0.958 & 1.000 & 0.931\\
C_{13} & 0.968 & 0.968 & 0.942 & 0.889 & 0.984 & 1.000 & 0.921 & 0.942\\
C_{14} & 0.940 & 0.963 & 0.918 & 0.929 & 0.987 & 0.963 & 1.000 & 0.987\\
C_{15} & 0.967 & 1.000 & 0.989 & 0.957 & 0.967 & 0.989 & 1.000 & 0.967\\
C_{16} & 0.979 & 1.000 & 0.990 & 0.959 & 1.000 & 0.969 & 1.000 & 0.990
\end{bmatrix}
$$

由式(18-8),计算得到

$$\underset{\sim}{R}_{公交H} = \begin{bmatrix} [\bar{\bar{H}}_i] & \\ [2.6378,2.6405,2.6837] & M_1 \\ [2.5163,2.5733,2.5927] & M_2 \\ [2.7001,2.7081,2.7203] & M_3 \\ [2.7111,2.7352,2.7743] & M_4 \\ [2.7217,2.7479,2.7518] & M_5 \\ [2.7221,2.7441,2.7553] & M_6 \\ [2.6616,2.6846,2.6933] & M_7 \\ [2.7014,2.7264,2.7371] & M_8 \end{bmatrix}$$

依据三元区间数的排序关系,则 8 个城市公交系统的综合测度值 $[\bar{\bar{H}}_i]$ 和优先排序关系见表 18-4。

表 18-4 各城市的综合测度结果

城市编号	复合物元模型		属性区间识别测度模型[99]	
	综合测度值	排序	综合测度值	排序
M_1	[2.6378,2.6405,2.6837]	7	0.7811	7
M_2	[2.5163,2.5733,2.5927]	8	0.7783	8
M_3	[2.7001,2.7081,2.7203]	5	0.7917	5
M_4	[2.7111,2.7352,2.7743]	3	0.8015	3
M_5	[2.7217,2.7479,2.7518]	1	0.8452	1
M_6	[2.7221,2.7441,2.7553]	2	0.8337	2
M_7	[2.6616,2.6846,2.6933]	6	0.7893	6
M_8	[2.7014,2.7264,2.7371]	4	0.7993	4

由表 18-4 中的综合测度值可知,复合物元模型所得到的测度结果同属性区间识别测度结果所得的结果一致,验证了复合物元测度的有效性和可行性。同时,通过优先排序可以知道 8 个城市公交系统的发展态势。排在后面的城市公交系统要想排名提前,达到较高水平,应采取如下措施[97]:首先,方便顾客出行原则,即创建与人和环境相适应的交通系统,始终坚持以人为本的理念,完善的道路交通设施,是为人提供方便,而不是为车辆提供最大的空间;其次,可持续发展原则,即合理有效地利用有限的交通资源和空间,公交线路系统的布设不仅符合当前城市客流发生和分布的客观规律,而且反映城市未来发展的交通变化;最后,智能化原则,即以先进的科学技术为基础,在资源合理利用和保护生态环境的指导思想下,提高整

个城市公交效率和服务水平，在经济合理地满足社会发展需求的同时，促进整个城市的和谐发展。

实例分析表明，复合物元模型清晰简明，将城市公交系统测度中多参数因子的目标测度归结为单目标决策。其评定结果具有明确的实际意义，不但能够全面地反映城市公交系统的发展态势，而且较完整地反映城市公交系统的综合水平，所以在城市交通评价领域中具有良好的应用前景。

第19章 基于方案矩阵的动态正弦决策法

由于多指标决策的复杂性、不确定性和决策者的主观性，目前国内外许多学者主要致力于解决具有多个指标、有限方案的静态决策问题，对动态决策问题的研究比较少。动态决策问题的实质是在决策空间和目标空间的基础上，又增加了时间问题，是具有时间、指标、方案的三维空间的决策排序问题。这样的决策过程与结果反映了动态特点。国内学者考虑了各指标在系统中的成长特性，建立了基于动态多指标的灰色关联度决策模型，但计算过程复杂、适应性不强。国外学者利用线性规划和理想矩阵法解决了指标取值、指标权重和时间权重都未知的多指标决策问题，但指标权重和时间权重的确定不够合理，具有片面性。近年来有的学者将灰色理论中的关联度分析法和多指标决策理论中的理想点法结合，提出了一类动态多指标的关联分析法，但过程过于简略，没有考虑时间权重的取值客观性问题。本章从三角函数中的正弦定理出发，依据关联度决策原理，提出了一种基于方案矩阵的动态正弦决策模型，并成功运用于城市公交系统的线网优化决策中。应用结果表明该法简单实用、结果可信，有广泛的应用前景。

19.1 问题描述

决策矩阵是一类特殊而重要的知识表达系统，多数决策问题都可以用矩阵表达，所以，决策矩阵在决策应用方面起着重要的作用。通常情况下，决策者所研究的决策问题中决策矩阵的对象属性值是确定的数。但在实际问题中很难保证所有对象属性值都是确定的。因此，由信息不确定导致对象属性值的不确定性，把这种对象属性值为不确定性数的决策矩阵称为方案矩阵。

设多指标决策问题有 n 个待选方案，m 个评价指标。记 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$ 为方案集；指标集为 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$。

动态多指标决策问题的时间区段为 $t(t=1,2,\cdots,q)$，其相应的时段权重用三元区间数表示为

$$[\bar{\bar{e}}_t]=[e_t^-,e_t^*,e_t^+]$$

$$\text{s. t. }:\sum_{t=1}^{q}e_t^-\leqslant 1,\sum_{t=1}^{q}e_t^*=1,\sum_{t=1}^{q}e_t^-\geqslant 1,e_t>0,e_t^*>,e_t^+>0$$

在 t 时段，决策方案 m 个指标的权重向量为 $W(t)=(w_1(t),w_2(t),\cdots,w_m(t))$

且 $w_i(t) \geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，$\sum_{i=1}^{m} w_i(t)=1$。

在 t 时段，方案 A_i 对指标 G_j 的属性值为 $v_{ij}(t)(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，则 t 时段，根据决策单元提供或决策者收集的各指标信息得到的决策矩阵见表 19-1。

表 19-1　决策矩阵

方 案	指标 G_1	指标 G_2	…	指标 G_m
方案 A_1	$v_{11}(t)$	$v_{12}(t)$	…	$v_{1m}(t)$
方案 A_2	$v_{21}(t)$	$v_{22}(t)$	…	$v_{2m}(t)$
⋮	⋮	⋮		⋮
方案 A_n	$v_{n1}(t)$	$v_{n2}(t)$	…	$v_{nm}(t)$

定义 19.1　在 t 时段，方案矩阵是用矩阵来表示决策方案的指标属性值。即

$$Y(t)=\begin{bmatrix} G_1 & v_{11}(t) & v_{21}(t) & \cdots & v_{n1}(t) \\ G_2 & v_{12}(t) & v_{22}(t) & \cdots & v_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_m & v_{1m}(t) & v_{2m}(t) & \cdots & v_{nm}(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_m(t) \end{matrix},\quad t=1,2,3,\cdots,q \tag{19-1}$$

19.2　动态正弦决策法

方案矩阵能够以不完全信息去处理一些不分明现象，在认知存在局限和无需提供问题所需处理的数据集合之处的任何先验信息的情况下，依据度量到的某些不精确的结果来实现对决策的优选和排序。

19.2.1　方案矩阵的标准化处理

由于各指标的含义不同，指标值的计算方法也不同，造成各个指标的量纲各异，各指标之间存在着不可公度性，给系统决策带来了不便。为了尽可能地反映实际情况，排除由于指标的单位不同以及数值数量级之间的悬殊差别所带来的影响，避免发生不合理的现象，必须对指标进行无量纲化处理。本章依据多指标决策理论，通过构造关联函数将各指标进行标准化处理。令

$$J^{+}=\{效益型指标\},\quad J^{-}=\{成本型指标\}$$

$$J^{\text{fixed}}=\{固定型指标\},\quad J^{\text{interval}}=\{区间型指标\}$$

则在 t 时段，构造关联函数 $r_{ij}(t)=k(v_{ij}(t))$，其中，当 $v_{ij}(t)\in\langle a_j(t),b_j(t)\rangle$ 时，$k(v_{ij}(t))>0$，$a_j(t)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} v_{ij}(t)$，$b_j(t)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} v_{ij}(t)$，即

(1) $r_{ij}(t)=k(v_{ij}(t))=$

$$\begin{cases}1, & v_{ij}(t)\geqslant b_j(t)\\ \dfrac{v_{ij}(t)-a_j(t)}{b_j(t)-a_j(t)}, & v_{ij}(t)\in\langle a_j(t),b_j(t)\rangle \quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^{+}\\ 0, & v_{ij}(t)\leqslant a_j(t)\end{cases}$$

(2) $r_{ij}(t)=k(v_{ij}(t))=$

$$\begin{cases}0, & v_{ij}(t)\geqslant b_j(t)\\ \dfrac{v_{ij}(t)-a_j(t)}{b_j(t)-a_j(t)}, & v_{ij}(t)\in\langle a_j(t),b_j(t)\rangle \quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^{-}\\ 1, & v_{ij}(t)\leqslant a_j(t)\end{cases}$$

(3) $r_{ij}(t)=k(v_{ij}(t))=$

$$\begin{cases}1-\dfrac{|v_{ij}(t)-v^{*}(t)|}{|b_j(t)-v^{*}(t)|}, & a_j(t)\neq v^{*}(t),b_j(t)\neq v^{*}(t)\\ 1, & a_j(t)=v^{*}(t)\text{ 或 }b_j(t)=v^{*}(t)\end{cases}$$

其中，$v^{*}(t)$ 为 t 时段的固定值；$i=1,2,\cdots,n;j\in J^{\text{fixed}}$。

(4) $r_{ij}(t)=k(v_{ij}(t))=$

$$\begin{cases}1-\dfrac{\max\{c_1^j(t)-v_{ij}(t),v_{ij}(t)-c_2^j(t)\}}{\max\{c_1^j(t)-a_j(t),b_j(t)-c_2^j(t)\}}, & v_{ij}(t)\notin[c_1^j(t),c_2^j(t)]\\ 1, & v_{ij}(t)\in[c_1^j(t),c_2^j(t)]\end{cases}$$

其中，$[c_1^j(t),c_2^j(t)]$ 为 t 时段的固定区间；$i=1,2,\cdots,n;j\in J^{\text{interval}}$。

定义 19.2 在 t 时段，方案标准矩阵是指标准化处理后的方案矩阵。即

$$R(t)=\begin{bmatrix}G_1 & r_{11}(t) & r_{21}(t) & \cdots & r_{n1}(t)\\ G_2 & r_{12}(t) & r_{22}(t) & \cdots & r_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ G_m & r_{1m}(t) & r_{2m}(t) & \cdots & r_{nm}(t)\end{bmatrix}\begin{matrix}w_1(t)\\ w_2(t)\\ \vdots\\ w_m(t)\end{matrix},\quad t=1,2,3,\cdots,q \tag{19-2}$$

19.2.2 指标权重系数的确定

权重系数是各个指标在指标总体中的变异程度和对其他指标影响程度的度量，赋权的原始信息应该直接来源于客观环境，可根据各指标所提供的信息量的大小来决定相应的权重系数。本章采用熵权系数法来确定各个指标的权重系数。因为熵是系统无序程度的度量，熵也可以度量数据所提供的信息量，所以在分析过程中通过熵值确定各指标的权重系数，具有一定的客观性和科学性。

由信息论可知在 t 时段，第 j 个指标 G_j 的熵为

$$H_j(t)=-(\ln n)^{-1}\sum_{i=1}^{n}p_{ij}(t)\ln p_{ij}(t),\quad j=1,2,\cdots,m \tag{19-3}$$

其中，$p_{ij}(t) = r_{ij}(t) \Big/ \sum_{i=1}^{n} r_{ij}(t)(j = 1,2,\cdots,m; i = 1,2,\cdots,n)$。

在 t 时段，第 j 个指标 G_j 的权重值为

$$w_j(t) = (1 - H_j(t)) \Big/ \left(m - \sum_{j=1}^{m} H_j(t)\right), \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{19-4}$$

19.2.3　正负关联度的确定

定义 19.3　在 t 时段，正理想方案 $A^+(t) = \{r_1^+(t), r_2^+(t), \cdots, r_m^+(t)\}$，其中，$r_j^+(t) = \max\{r_{ij}(t), 1 \leqslant i \leqslant n\}$；在 t 时段，负理想方案 $A^-(t) = \{r_1^-(t), r_2^-(t), \cdots, r_m^-(t)\}$，其中，$r_j^-(t) = \min\{r_{ij}(t), 1 \leqslant i \leqslant n\}$。

定义 19.4　在 t 时段，第 i 方案 A_i 与正理想方案 $A^+(t)$ 关于指标 G_j 的关联系数为

$$\zeta_{ij}^+(t) = \frac{\max_i \max_j |r_{ij}(t) - r_j^+(t)| + 0.5 \max_i \min_j |r_{ij}(t) - r_j^+(t)|}{|r_{ij}(t) - r_j^+(t)| + 0.5 \max_i \max_j |r_{ij}(t) - r_j^+(t)|}$$

$$i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m$$

在 t 时段，第 i 方案 A_i 与负理想方案 $A^-(t)$ 关于指标 G_j 的关联系数为

$$\zeta_{ij}^-(t) = \frac{\max_i \max_j |r_{ij}(t) - r_j^-(t)| + 0.5 \max_i \min_j |r_{ij}(t) - r_j^-(t)|}{|r_{ij}(t) - r_j^-(t)| + 0.5 \max_i \max_j |r_{ij}(t) - r_j^-(t)|}$$

$$i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m$$

则在 t 时段，第 i 方案 A_i 与正理想方案 $A^+(t)$ 和负理想方案 $A^-(t)$ 的关联度分别为

$$f_i^+(t) = \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot \zeta_{ij}^+(t), \quad i = 1,2,\cdots,n; t = 1,2,\cdots,q \tag{19-5}$$

$$f_i^-(t) = \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot \zeta_{ij}^-(t), \quad i = 1,2,\cdots,n; t = 1,2,\cdots,q \tag{19-6}$$

19.2.4　时间段权重系数的确定

满意决策和决策的满意排序是在一系列严格的数学定理、规则和逻辑推理下，充分运用人的经验知识情况下得到的。由于五级标度法是基于经验知识的决策法，所以，笔者利用它来确定时段的权重系数。

客观现实中的系统在运行过程中或受环境的影响，或受评价者的主观愿望的影响对不同时段的重视程度不同，所以时段权重系数 $[\bar{\bar{e}}_t] = [e_t^-, e_t^*, e_t^+]$ e_t $(t = 1,2,\cdots,q)$ 不能用熵权系数法来确定，应该采用主观赋权法来确定。笔者这里提出一种新方法——基于三元区间数的五级标度法来确定不同时段的权重系数。因为五级标度法可以紧密地和决策者的主观判断及推理联系起来，对决策者的推理过程进行量化的描述，既避免决策者在结构复杂和方案较多的逻辑推理上

产生失误，也适用于那些难以完全用定量指标进行分析的复杂问题。所以，可根据各时段对决策问题的重要性程度，把时段的重要性划分为 5 个等级，并用三元区间数表示。见表 19-2。

表 19-2 时段等级

等 级	一级	二级	三级	四级	五级
时段属性	特别重要	极重要	较重要	重要	一般
取值范围	[0.9,0.95,1.0)	[0.8,0.85,0.9)	[0.7,0.75,0.8)	[0.6,0.65,0.7)	[0.5,0.55,0.6)

由于决策问题中的时段在不同情况下所起的作用不同，所以它在不同的情况下属于不同的等级，并且在特定条件下偏向于一个特定值，所以可用三元区间数表示。因此在具体的决策问题中，结合实际情况就可以得到不同时段的等级，并在考虑其偏好值的基础上，根据时段等级的取值范围就可得到时段 t 的初始权重值 $[\bar{\bar{z}}_t]=[z_t^-,z_t^*,z_t^+](t=1,2,\cdots,q)$。然后运用模糊数学中的有关知识，将它模糊处理为

$$[\bar{\bar{\lambda}}_t]=[\lambda_t^-,\lambda_t^*,\lambda_t^+]=\frac{[\bar{\bar{z}}_t]-[\bar{\bar{a}}]}{[\bar{\bar{b}}]-[\bar{\bar{a}}]},\quad t=1,2,\cdots,q$$

一般情况下 $[\bar{\bar{a}}]=[0.5,0.5,0.5]$，$[\bar{\bar{b}}]=[1,1,1]$。为了使权重满足归一化条件，再把时段的权重规范化处理：

令 $[\bar{\bar{e}}_t]=[e_t^-,e_t^*,e_t^+]=[\bar{\bar{\lambda}}_t]\Big/\sum\limits_{i=1}^{q}[\bar{\bar{\lambda}}_t](t=1,2,\cdots,q)$，则各时段的权重为 $[\bar{\bar{e}}_t]=[e_t^-,e_t^*,e_t^+]$，且满足 $\sum\limits_{t=1}^{q}e_t^-\leqslant 1,\sum\limits_{t=1}^{q}e_t^*=1,\sum\limits_{t=1}^{q}e_t^+\geqslant 1,e_t^->0,e_t^*>0,e_t^+>0$。

考虑所有时段 $t=1,2,3,\cdots,q$，采用加权法就可求得有时序多指标决策问题的相关度。则：

(1) 所有时段，第 i 方案 A_i 与正理想方案 $A^+(t)$ 的相关度为

$$[\bar{\bar{F}}_i^+]=\sum_{t=1}^{q}[\bar{\bar{e}}_t]\cdot f_i^+(t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{19-7}$$

(2) 所有时段，第 i 方案 A_i 与负理想方案 $A^-(t)$ 的相关度为

$$[\bar{\bar{F}}_i^-]=\sum_{t=1}^{q}[\bar{\bar{e}}_t]\cdot f_i^-(t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{19-8}$$

19.2.5 动态正弦决策模型

$[\bar{\bar{F}}_i^+](i=1,2,\cdots,n)$ 越大，决策方案 A_i 与各时段正理想方案 $A^+(t)$ 越接近，表示决策方案 A_i 越优。

$\left[\bar{\bar{F}}_i^-\right](i=1,2,\cdots,n)$ 越小，决策方案 A_i 与各时段正理想方案 $A^+(t)$ 越接近，表示决策方案 A_i 越优。

因此，根据优选的相对性，可以定义 $\left[\bar{\bar{F}}_i^+\right]$ 和 $\left[\bar{\bar{F}}_i^-\right]$ 为直角三角形的两条直角边，$\left[\bar{\bar{\theta}}_i\right]$ 为直角边 $\left[\bar{\bar{F}}_i^+\right]$ 和斜边 $\sqrt{\left(\left[\bar{\bar{F}}_i^+\right]\right)^2+\left(\left[\bar{\bar{F}}_i^-\right]\right)^2}$ 的夹角。

由于在直角三角形中，有

$$0<\sin\left[\bar{\bar{\theta}}_i\right]=\frac{\left[\bar{\bar{F}}_i^-\right]}{\sqrt{\left(\left[\bar{\bar{F}}_i^+\right]\right)^2+\left(\left[\bar{\bar{F}}_i^-\right]\right)^2}}<1,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{19-9}$$

且 $\sin\left[\bar{\bar{\theta}}_i\right]$ 随着 $\left[\bar{\bar{\theta}}_i\right]$ 增大而增大，所以建立动态正弦决策模型为

$$\max_i\left\{D_i \,\middle|\, D_i=\sin\left[\bar{\bar{\theta}}_i\right]\right\} \tag{19-10}$$

显然 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 越大对应的决策方案 A_i 越优，并且依据 D_i 的大小对决策方案进行优劣排序。

19.2.6　决策模型的算法步骤

步骤 1　建立方案矩阵。

依据表 19-1 和式(19-1)，建立方案矩阵 $Y(t)$。

步骤 2　建立方案标准矩阵。

依据式(19-2)，建立决策方案集的方案标准矩阵 $R(t)$。

步骤 3　确定 t 时段各决策指标的权重。

依据式(19-4)，得到各决策指标的权重 w_j。

步骤 4　确定各时段正负关联度。

依据式(19-5)、式(19-6)，得到各时段正负关联度 $f_i^+(t)$ 和 $f_i^-(t)$。

步骤 5　确定时段权重及正负相关度。

依据表 19-2，得到各时段的权重 $\left[\bar{e}_t\right]=\left[e_t^-,e_t^*,e_t^+\right]$；依据式(19-7)、式(19-8)，得到正负相关度 $\left[\bar{\bar{F}}_i^+\right]$ 和 $\left[\bar{\bar{F}}_i^-\right]$。

步骤 6　确定正弦值与最佳方案。

依据式(19-9)，得到各决策方案的正弦值 D_i；依据式(19-10)，得到最佳决策方案 A_i。

19.3 案例分析

依据“十一五”规划，许多城市在考虑城市发展的基础上，公共交通优先发展的情况下，通过政府招标的形式对现有的城市公共交通网络系统进行改造扩建。招商银行打算参与 4 个城市 B_1、B_2、B_3、B_4 的公共交通改造工程，在投资前进行决策分析。选取了 6 个主要指标进行决策，分别是公交企业经济效益 G_1、线网覆盖率 G_2、线路重复系数 G_3、乘客直达率 G_4、乘客总出行时间 G_5、线路网络日均满载率 G_6。招商银行对 4 个城市 B_1、B_2、B_3、B_4 的城市公共交通网络系统进行了考察，具体数据见表 19-3。

表 19-3　指标考察值

指标	单位	B_1			B_2			B_3			B_4		
		02 年	03 年	04 年	02 年	03 年	04 年	02 年	03 年	04 年	02 年	03 年	04 年
G_1	万元	1886.1	2001.7	2012.3	1007.5	1178.1	1391.3	1356.8	1537.2	1607.3	1671.8	1783.5	1938.6
G_2	%	59.5	60.1	61.3	55.5	56.3	57.1	50.2	51.3	52.3	60.3	58.7	57.7
G_3	%	25.5	23.7	22.8	18.5	17.8	16.5	15.5	15.3	14.9	17.2	16.8	15.2
G_4	%	60.5	61.7	61.9	55.5	58.7	60.1	45.5	47.2	49.3	58.1	59.2	60.1
G_5	min	35	33	32	20	23	25	30	29	28	38	36	35
G_6	%	60.7	61.3	62.2	40.7	48.9	50.8	90.1	83.3	81.1	75.2	78.1	78.7

具体计算步骤如下：

步骤 1　建立方案矩阵。

$$02\text{ 年的方案矩阵 } Y(02)=\begin{bmatrix} G_1 & 1886.1 & 1007.5 & 1356.8 & 1671.8 \\ G_2 & 59.5 & 55.5 & 50.2 & 60.3 \\ G_3 & 25.5 & 18.5 & 15.5 & 17.2 \\ G_4 & 60.5 & 55.5 & 45.5 & 58.1 \\ G_5 & 35 & 20 & 30 & 38 \\ G_6 & 60.5 & 40.7 & 90.1 & 75.2 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1(02) \\ w_2(02) \\ w_3(02) \\ w_4(02) \\ w_5(02) \\ w_6(02) \end{matrix}$$

$$03\text{ 年的方案矩阵 } Y(03)=\begin{bmatrix} G_1 & 2001.7 & 1178.1 & 1537.2 & 1783.5 \\ G_2 & 60.1 & 56.3 & 51.3 & 58.7 \\ G_3 & 23.7 & 17.8 & 15.3 & 16.8 \\ G_4 & 61.7 & 58.7 & 47.2 & 59.2 \\ G_5 & 33 & 23 & 29 & 36 \\ G_6 & 61.3 & 48.9 & 83.3 & 78.1 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1(03) \\ w_2(03) \\ w_3(03) \\ w_4(03) \\ w_5(03) \\ w_6(03) \end{matrix}$$

$$
04\text{年的方案矩阵}\ Y(04)=\begin{bmatrix} G_1 & 2012.3 & 1391.3 & 1607.3 & 1938.6 \\ G_2 & 61.3 & 57.1 & 52.3 & 57.7 \\ G_3 & 22.8 & 16.5 & 14.9 & 15.2 \\ G_4 & 61.9 & 60.1 & 49.3 & 60.1 \\ G_5 & 32 & 25 & 28 & 35 \\ G_6 & 62.2 & 50.8 & 81.1 & 78.7 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1(04) \\ w_2(04) \\ w_3(04) \\ w_4(04) \\ w_5(04) \\ w_6(04) \end{matrix}
$$

步骤 2　建立方案标准矩阵。

$$
02\text{年的方案标准矩阵}\ R(02)=\begin{bmatrix} G_1 & 1 & 0 & 0.602 & 0.244 \\ G_2 & 0.079 & 0.835 & 0 & 1 \\ G_3 & 1 & 0.7 & 0 & 0.831 \\ G_4 & 1 & 0.667 & 0 & 0.833 \\ G_5 & 0.833 & 1 & 0.556 & 0 \\ G_6 & 0.405 & 0 & 1 & 0.698 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1(02) \\ w_2(02) \\ w_3(02) \\ w_4(02) \\ w_5(02) \\ w_6(02) \end{matrix}
$$

$$
03\text{年的方案标准矩阵}\ R(03)=\begin{bmatrix} G_1 & 1 & 0 & 0.436 & 0.735 \\ G_2 & 1 & 0.5 & 0 & 0.740 \\ G_3 & 0 & 0.702 & 1 & 0.821 \\ G_4 & 1 & 0.871 & 0 & 0.909 \\ G_5 & 0.231 & 1 & 0.538 & 0 \\ G_6 & 0.360 & 0 & 1 & 0.849 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1(03) \\ w_2(03) \\ w_3(03) \\ w_4(03) \\ w_5(03) \\ w_6(03) \end{matrix}
$$

$$
04\text{年的方案标准矩阵}\ R(04)=\begin{bmatrix} G_1 & 1 & 0 & 0.348 & 0.881 \\ G_2 & 1 & 0.533 & 0 & 0.6 \\ G_3 & 0 & 0.797 & 1 & 0.962 \\ G_4 & 1 & 0.857 & 0 & 0.857 \\ G_5 & 0.300 & 1 & 0.7 & 0 \\ G_6 & 0.300 & 0 & 1 & 0.921 \end{bmatrix}\begin{matrix} w_1(04) \\ w_2(04) \\ w_3(04) \\ w_4(04) \\ w_5(04) \\ w_6(04) \end{matrix}
$$

步骤 3　确定 t 时段各指标权重。

02 年，指标权重向量 $W(02)=(0.181,0.167,0.157,0.171,0.163,0.161)$。

03 年，指标权重向量 $W(03)=(0.173,0.159,0.168,0.175,0.161,0.164)$。

04 年，指标权重向量 $W(04)=(0.169,0.173,0.159,0.167,0.169,0.163)$。

步骤 4　确定各时段正负关联度。

(1) 02 年，正关联度 $f^+(02)=(0.783,0.681,0.598,0.692)$；负关联度 $f^-(02)=(0.601,0.597,0.587,0.667)$。

(2) 03 年，正关联度 $f^+(03)=(0.694,0.771,0.617,0.703)$；负关联度 $f^-(03)=$

(0.651,0.717,0.588,0.689)。

(3) 04年,正关联度 $f^+(04)$=(0.681,0.737,0.714,0.693);负关联度 $f^-(04)$=(0.677,0.724,0.692,0.684)。

步骤5 确定时段权重及正负相关度。

由表19-2可得到各时段的权重值,见表19-4。

表19-4 权重值

时段	02年	03年	04年
等级	三级	二级	二级
$[\bar{\bar{z}}_t]=[z_t^-,z_t^*,z_t^+]$	[0.70,0.75,0.80]	[0.80,0.81,0.85]	[0.85,0.87,0.90]
$[\bar{\bar{\lambda}}_t]=[\lambda_t^-,\lambda_t^*,\lambda_t^+]$	[0.48,0.50,0.62]	[0.61,0.62,0.69]	[0.69,0.74,0.77]
$[\bar{\bar{e}}_t]=[e_t^-,e_t^*,e_t^+]$	[0.307,0.318,0.337]	[0.335,0.337,0.342]	[0.342,0.345,0.349]

02年、03年、04年的权重向量为

$$[\vec{\bar{\bar{E}}}]=([0.307,0.318,0.337],[0.335,0.337,0.342],[0.342,0.345,0.349])$$

依据式(19-7)、式(19-8)知:

(1) 城市 B_1 的正相关度 $[\bar{\bar{F}}_1^+]$=[0.712,0.718,0.720];负相关度 $[\bar{\bar{F}}_1^-]$=[0.641,0.644,0.647]。

(2) 城市 B_2 的正相关度 $[\bar{\bar{F}}_2^+]$=[0.729,0.731,0.735];负相关度 $[\bar{\bar{F}}_2^-]$=[0.678,0.681,0.683]。

(3) 城市 B_3 的正相关度 $[\bar{\bar{F}}_3^+]$=[0.641,0.644,0.649];负相关度 $[\bar{\bar{F}}_3^-]$=[0.619,0.624,0.629]。

(4) 城市 B_4 的正相关度 $[\bar{\bar{F}}_4^+]$=[0.631,646,0.699];负相关度 $[\bar{\bar{F}}_4^-]$=[0.677,0.680,0.685]。

步骤6 确定正弦值与最佳方案。

依据式(19-9)知

$$\sin[\bar{\bar{\theta}}_1]=[0.741,0.743,0.747],\quad \sin[\bar{\bar{\theta}}_2]=[0.729,0.732,0.734]$$

$$\sin[\bar{\bar{\theta}}_3]=[0.713,0.718,0.721],\quad \sin[\bar{\bar{\theta}}_4]=[0.713,0.715,0.718]$$

由优化模型及排序原则可知，这 4 个城市的排序关系为

$$B_1 \succ B_2 \succ B_3 \succ B_4$$

所以城市 B_1 为最佳投资对象。

应用结果表明，动态正弦决策法用于多指标决策问题客观、简便、有效，不但可以解决不相容指标权值分配难问题，而且为动态多指标提供了一条新的途径。

第 20 章　动态多指标决策的两类模糊优选模型

多目标系统模糊优化是运用人的经验知识，通过对目标的重要性与优越性的反复二元相对比较与思考，确定目标权重向量与目标相对优属度矩阵，并利用模糊优先计算决策集的相对优属度，然后依据优属度进行优选决策。而动态多指标决策是在决策空间和目标空间的基础上，又增加了时间空间，是具有时间、指标、方案的三维决策排序问题，这样问题的决策过程与结果反映了动态特点。模糊优选理论模型是基于多目标系统中方案的特征值进行优选的，方案的优劣与方案特征值的相对隶属度有关。优选的模糊性是方案优劣识别工程中所呈现的一种客观属性。目前，国内外对多目标决策的研究成果主要有：学者孙晓东等人分别针对多指标决策问题，提出基于理想点法的决策分析模型，并针对静态多指标决策问题通过构造新贴近度来反映方案与正负理想方案之间的位置关系和数据曲线的相似性差异，并分析了数据序列之间的距离关系，但没有说明数据的态势变化[78]；学者党耀国等人提出了基于理想点和灰色关联度的动态决策模型，将解决静态决策问题的分析方法进一步推广，以灰色关联度为准则实现方案优选，取得一定效果，并提出一种易于计算且实用的[－1,1]线性变换算子，但没有考虑正负理想方案关联情况，测评结果不够全面[101]；学者樊治平等人直接给出了基于灰色关联度的动态决策模型，从方案数据曲线态势变化上反映了方案的优劣情况，但不够全面客观[102]；学者李希灿等人给出了一种静态条件下求解最优优属度和最优权重的模糊迭代算法，为模糊优选决策、合理确定指标权重提供了理论依据，但没有研究动态条件下的模糊优选问题[103]。

对动态多指标决策问题所采取的方法，大多是将目前较为成熟的静态多指标决策方法发展到动态多指标决策。即主要从理论上探讨人们在决策过程中的行为机理，研究人们在决策过程中按照什么准则和什么方式进行决策，才能符合决策者的偏好和判断。所以，本章在考虑主观监督因子的前提下，依据“数字-信息-知识”的思维方式，从“决策空间-目标空间-时间空间”三个方面，将静态多指标决策方法变成动态多指标决策方法，建立基于动态多指标的模糊优选决策模型和理想决策模型，并给出案例分析来说明两种决策模型的有效性和实用性。

20.1　问题描述和基本定义

模糊关系描述了事物之间的普遍关系，但它仅表达了单目标多系统事物间的

联系。现在在决策相对优属度研究的基础上，将模糊优选和模糊关系结合起来，建立模糊关系优选理论模型。将多个目标模糊关系进行合成，使其变为表达多目标多系统事物之间的联系。

设多指标决策问题有 n 个待选方案，m 个决策指标。记方案集 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$，指标集 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$。

动态多指标决策问题的时间区段为 $t(t=1,2,\cdots,q)$，其相应的时段权重为

$$[\bar{\bar{e}}_t]=[e_t^-,e_t^*,e_t^+]$$

$$\text{s.t.}:\sum_{t=1}^{q}e_t^-\leqslant 1,\sum_{t=1}^{q}e_t^*=1,\sum_{t=1}^{q}e_t^+\geqslant 1,e_t^->0,e_t^*>0,e_t^+>0$$

令

(1) 在 t 时段，决策方案的 m 个指标的权重向量为 $W(t)=(w_1(t),w_2(t),\cdots,w_m(t))$ 且 $w_i(t)\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，$\sum_{i=1}^{m}w_i(t)=1$。

(2) 在 t 时段，决策方案 A_i 对决策指标 G_j 的属性值 $x_{ij}(t)(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$。

则在 t 时段，方案集 A 对指标集 G 的决策矩阵为

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1m}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2m}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nm}(t)\end{bmatrix} \tag{20-1}$$

20.1.1 决策矩阵的标准化处理

为了使各指标有公度性，必须对决策矩阵进行标准化处理。令

$$J^+=\{\text{效益型指标}\},\quad J^-=\{\text{成本型指标}\}$$

$$J^{\text{fixed}}=\{\text{固定型指标}\},\quad J^{\text{interval}}=\{\text{区间型指标}\}$$

则有

(1) $r_{ij}(t)=\dfrac{x_{ij}(t)-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}(t)}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}(t)-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}(t)},\quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^+$

(2) $r_{ij}(t)=\dfrac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}(t)-x_{ij}(t)}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}(t)-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}(t)},\quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^-$

(3) $r_{ij}(t)=\dfrac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_{ij}(t)-v^*(t)|-|x_{ij}-v^*(t)|}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_{ij}(t)-v^*(t)|},\quad i=1,2,\cdots,n;j\in J^{\text{fixed}}$

其中，$v^*(t)$ 为 t 时段的固定值。

$$(4)\ r_{ij}=\begin{cases}1-\left[\dfrac{\max\{c_1^j(t)-x_{ij}(t),x_{ij}(t)-c_2^j(t)\}}{\max\{c_1^j(t)-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}(t),\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}(t)-c_2^j(t)\}}\right], & v_{ij}(t)\notin[c_1^j(t),c_2^j(t)]\\ 1, & v_{ij}(t)\in[c_1^j(t),c_2^j(t)]\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,n;j\in J^{\text{interval}}$$

其中，$[c_1^j(t),c_2^j(t)]$ 为 t 时段的固定区间。

t 时段，标准化处理后的决策矩阵为

$$R(t)=\begin{bmatrix}r_{11}(t) & r_{12}(t) & \cdots & r_{1m}(t)\\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & \cdots & r_{2m}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{n1}(t) & r_{n2}(t) & \cdots & r_{nm}(t)\end{bmatrix}\tag{20-2}$$

20.1.2　决策指标权重系数的确定

由于客观事物的复杂性和不确定性，以及人类思维的模糊性，往往不能明确给出指标的权重信息。为了增大决策过程的客观性，本章采用关联熵法来确定各决策指标的权重系数。

定义 20.1　在 t 时段，参考数列

$$Y(t)=\{y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t)\}$$

其中，$y_j(t)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}r_{ij}(t)(j=1,2,\cdots,m)$。

决策方案 $A_i(t)$ 的第 j 个指标 G_j 具有的关联系数为

$$\zeta_{ij}(t)=\frac{\min\limits_i\min\limits_j|r_{ij}(t)-y_j(t)|+0.5\max\limits_i\max\limits_j|r_{ij}(t)-y_j(t)|}{|r_{ij}(t)-y_j(t)|+0.5\max\limits_i\max\limits_j|r_{ij}(t)-y_j(t)|}\tag{20-3}$$

由信息论可知第 j 个指标 G_j 的熵为

$$F_j(t)=-(\ln n)^{-1}\sum_{i=1}^n f_{ij}(t)\ln f_{ij}(t),\quad j=1,2,\cdots,m\tag{20-4}$$

其中，$f_{ij}(t)=\zeta_{ij}(t)\Big/\sum\limits_{i=1}^n\zeta_{ij}(t)(j=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,n)$。

定义 20.2　由于 $F_j(t)\in[0,1]$，令偏差度

$$k_j(t)=1-F_j(t),\quad j=1,2,\cdots,m$$

则在 t 时段，第 j 个指标 G_j 的权重为

$$w_j(t)=k_j(t)\Big/\sum_{j=1}^m k_j(t),\quad j=1,2,\cdots,m\tag{20-5}$$

20.1.3　时段权重系数的确定

采用和第 19 章一样的方法，即利用基于三元区间数的五级标度法来确定时段

系数。则各时段的权重为 $[\bar{e}_t]=[e_t^-,e_t^*,e_t^+]$，时段权重向量为

$$[\vec{\bar{E}}]=([\bar{e}_1],[\bar{e}_2],\cdots,[\bar{e}_q]) \tag{20-6}$$

20.2　多指标决策的动态优选模型

优与劣是一对概念，既有差异又有共维且处于两极，具有中介过渡性，是客观存在着的模糊概念。这是优选的模糊性，是事物在优与劣识别过程中所呈现的一种客观属性。在动态多指标决策系统中，方案的优与劣是一对客观存在的模糊概念，这里优选的模糊性是方案优劣识别过程中所呈现的一种客观属性[4]。为了充分反映方案的稳定性和可靠性，在确定广义权距离的基础上，进一步从方案指标的相对隶属度挖掘有用的信息，构造动态模糊优选模型，并通过优属度的大小排序来确定最佳方案。

20.2.1　广义权距离的确定

定义 20.3　在 t 时段，最优方案为

$$A^+(t)=\{g_1(t),g_2(t),\cdots,g_m(t)\}$$

其中，$g_i(t)=r_{i1}(t)\vee r_{i2}(t)\vee\cdots\vee r_{in}(t)$。

在 t 时段，最劣方案为

$$A^-(t)=\{b_1(t),b_2(t),\cdots,b_m(t)\}$$

其中，$b_i(t)=r_{i1}(t)\wedge r_{i2}(t)\wedge\cdots\wedge r_{in}(t)$。

为了计算方便，最优方案可取 $A^+(t)=\{1,1,\cdots,1\}$，最劣方案 $A^-(t)=\{0,0,\cdots,0\}$。

定义 20.4　在 t 时段，方案 $A_i(t)$ 与优等方案 $A^+(t)$ 的优加权欧氏距离为

$$d_i^+(t)=d_i(A^+(t),A_i(t))=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[g_j(t)-r_{ij}(t)]\}^2},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{20-7}$$

在 t 时段，方案 $A_i(t)$ 与劣等方案 $A^-(t)$ 的优加权欧氏距离为

$$d_i^-(t)=d_i(A^-(t),A_i(t))=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[b_j(t)-r_{ij}(t)]\}^2},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{20-8}$$

定义 20.5　在 t 时段，设方案 $A_i(t)$ 隶属于优等方案 $A^+(t)$ 的优属度 $u_i(t)$，则属于劣等方案 $A^-(t)$ 的优属度为

$$u_i^c(t)=1-u_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n$$

定义 20.6　在 t 时段，方案 $A_i(t)$ 与优等方案 $A^+(t)$ 的优广义权距离为

$$D_i^+(t) = D_i(A^+(t), A_i(t)) = u_i(t)\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[g_j(t)-r_{ij}(t)]\}^2},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{20-9}$$

在 t 时段，方案 $A_i(t)$ 与劣等方案 $A^-(t)$ 的优广义权距离为

$$D_i^-(t) = D_i(A^-(t), A_i(t)) = u_i^c(t)\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[b_j(t)-r_{ij}(t)]\}^2},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{20-10}$$

20.2.2　优属度的确定

模糊优选理论模型是基于多目标系统中方案的特征值进行优选的，方案的优劣与方案的特征值的相对属度有关，所以通过优属度的大小可以判断方案的优劣。在 t 时段，优属度 $u_i(t)$ 越大，则决策方案 $A_i(t)$ 越优。为了求解方案 $A_i(t)$ 相对优等方案的优属度 $u_i(t)$，建立模糊环境下的目标函数为

$$\min F(u) = \min\sum_{i=1}^{n}\{(1-\alpha)([D_i^+(t)]^2+[D_i^-(t)]^2)+\alpha([d_i^+(t)]^2+[d_i^-(t)]^2)\} \tag{20-11}$$

其中，$\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant1)$为主观监督因子，$\alpha$ 越大主观影响力越大，α 越小主观影响越小，$\alpha=0$ 时 目标函数不受主观因素影响。

式(20-11)为无约束极值问题，所以，为了对式(20-11)求解，应该先求导并令导数为零，即

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u_i(t)} = 0$$

则

$$u_i(t)\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[g_j(t)-r_{ij}(t)]\}^2-(1-u_i(t))\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[r_{ij}(t)-b_j(t)]\}^2=0$$

所以，有

$$u_i(t) = \left[\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[r_{ij}(t)-b_j(t)]\}^2\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[r_{ij}(t)-b_j(t)]\}^2+\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[g_j(t)-r_{ij}(t)]\}^2\right]^{-1} \tag{20-12}$$

20.2.3　最佳决策方案的确定

在所有时段，决策方案 A_i 的综合优属度为

$$\left[\bar{\bar{U}}_i\right]=\sum_{t=1}^{q}\left[\bar{\bar{e}}_t\right]\cdot u_i(t) \tag{20-13}$$

根据最大优属度原则，最佳决策方案 A_i 对应的最大综合优属度为

$$\left[\bar{\bar{f}}_i\right]=\max\left\{\left[\bar{\bar{U}}_i\right] \mid i=1,2,\cdots,n\right\}$$

并依综合优属度 $\left[\bar{\bar{U}}_i\right]$ 的大小对所有决策方案进行优劣排序。

20.2.4　动态优选模型的算法步骤

步骤 1　将决策矩阵标准化处理。

步骤 2　依据式(20-5)，确定 t 时段决策指标的权重系数。

步骤 3　由五级权重法，确定各时段的权重系数。

步骤 4　依据式(20-12)，确定 t 时段的优属度。

步骤 5　依据式(20-13)，确定各决策方案的综合优属度，并依据综合优属度的大小对各决策方案排序。即排在最前面的决策方案为最佳方案。

20.3　多指标决策的动态理想模型

在"贫信息"情况下，传统数学方法无法客观全面地分析动态多指标决策问题。而正负关联度具有需要原始数据少、易于挖掘数据规律等优点，并能很好分析态势变化，是曲线形态相似性的衡量尺度[104,105]。对于动态多指标决策问题来说，如果决策方案与正理想方案的关联度越大，可以认为该方案越优；相反与负理想方案越近，表示越差。所以，也可以通过定义正负关联度来构造贴近度实现方案优选。

20.3.1　关联度点的确定

定义 20.7　在 t 时段，正关联度点为

$$P^*(t)=(r_1^+(t),r_2^+(t),\cdots,r_m^+(t))^{\mathrm{T}}$$

其中，$r_j^+(t)=\max\{r_{ij}(t),1\leqslant i\leqslant n\}$。

在 t 时段，负关联度点为

$$P_*(t)=(r_1^-(t),r_2^-(t),\cdots,r_m^-(t))^{\mathrm{T}}$$

其中，$r_j^-(t)=\min\{r_{ij}(t),1\leqslant i\leqslant n\}$。

20.3.2　贴近度的确定

在 t 时段，最优决策方案 $A_i(t)$ 应该是与正理想方案 $A^+(t)$ 的关联程度最大，而与负理想方案 $A^-(t)$ 的关联程度最小。所以，令 t 时段，决策方案 $A_i(t)$ 相对于正关联度点 $P^*(t)$ 和负关联度点 $P_*(t)$ 的相对贴近度为

$$\delta_i(t)=\frac{(P^*(t)-Q_i(t))^{\mathrm{T}}\cdot(P^*(t)-P_*(t))}{\|P^*(t)-P_*(t)\|},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{20-14}$$

其中，$Q_i(t)=[r_{i1}(t),r_{i2}(t),\cdots,r_{im}(t)]^{\mathrm{T}}$；$\|P^*(t)-P_*(t)\|=\sum_{j=1}^{m}(r_j^+(t)-r_j^-(t))^2$。

20.3.3 最佳方案的确定

在所有时段，决策方案 A_i 的综合贴近度为

$$[\bar{\bar{\eta}}_i]=\sum_{t=1}^{q}[\bar{\bar{e}}_t]\cdot\delta_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{20-15}$$

所以，根据 $[\bar{\bar{\eta}}_i]$ 值的大小对决策方案进行排序，即 $[\bar{\bar{s}}_i]=\max\{[\bar{\bar{\eta}}_i]|i=1,2,\cdots,n\}$ 对应的决策方案 A_i 为最佳方案。

定义 20.8　在 t 时段，决策方案 $A_i(t)$ 与正关联度点 $P^*(t)$ 的距离为

$$d_i^*(t)=d(P^*(t),A_i(t))=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\{w_j(t)\cdot[r_j^+(t)-r_{ij}(t)]\}^2},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{20-16}$$

在所有时段，决策方案 A_i 与正关联度点 $P^*(t)$ 的距离为

$$[\bar{\bar{D}}_i]^*=\sum_{t=1}^{q}[\bar{\bar{e}}_t]\cdot d_i^*(t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{20-17}$$

若在 t 时段，有两个以上决策方案的综合贴近度 $[\bar{\bar{\eta}}_i]$ 值相等，则通过 $[\bar{\bar{D}}_i]^*$ 值的大小加以区分，计算值 $[\bar{\bar{D}}_i]^*$ 小者，对应决策方案 A_i 越佳。

20.3.4 动态理想模型的算法步骤

步骤 1　将决策矩阵标准化处理。

步骤 2　依据式(20-5)，确定 t 时段决策指标的权重系数。

步骤 3　由五级权重法，确定各时段的权重系数。

步骤 4　依据式(20-14)，确定 t 时段贴近度。

步骤 5　依据式(20-15)，确定各决策方案的综合贴近度，并依据综合贴近度的大小对各决策方案排序，排在最前面的决策方案为最佳方案。

20.4 案例分析

本章采用第 19 章的案例分析。依据第 19 章中的表 19-3，对本章两种基于区

间数的动态计算方法进行实例计算。过程如下：

1. 利用动态优选决策模型进行优先排序

步骤 1　标准化处理后决策矩阵为

$$R(02)=\begin{bmatrix} 1 & 0.079 & 1 & 1 & 0.833 & 0.405 \\ 0 & 0.835 & 0.7 & 0.667 & 1 & 0 \\ 0.602 & 0 & 0 & 0 & 0.556 & 1 \\ 0.244 & 1 & 0.831 & 0.833 & 0 & 0.698 \end{bmatrix}$$

$$R(03)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0.231 & 0.360 \\ 0 & 0.5 & 0.702 & 0.871 & 1 & 0 \\ 0.436 & 0 & 1 & 0 & 0.538 & 1 \\ 0.735 & 0.740 & 0.821 & 0.909 & 0 & 0.849 \end{bmatrix}$$

$$R(04)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.533 & 0.797 & 0.857 & 1 & 0 \\ 0.348 & 0 & 1 & 0 & 0.700 & 1 \\ 0.881 & 0.6 & 0.962 & 0.857 & 0 & 0.921 \end{bmatrix}$$

步骤 2　确定 t 时段各指标的权重系数。

02 年，指标权重向量 $W(02)=(0.174,0.168,0.158,0.172,0.165,0.163)$。

03 年，指标权重向量 $W(03)=(0.171,0.161,0.169,0.172,0.162,0.165)$。

04 年，指标权重向量 $W(04)=(0.168,0.171,0.163,0.166,0.168,0.164)$。

步骤 3　确定各时段权重系数。

由基于三元区间数的五级权重法可知 02 年、03 年、04 年的权重向量为

$$\overrightarrow{[\bar{\bar{E}}]}=([0.319,0.323,0.327],[0.331,0.336,0.341],[0.339,0.341,0.343])$$

步骤 4　确定 t 时段的优属度。

02 年，各个城市的优属度 $u(02)=(0.458,0.471,0.413,0.447)$。

03 年，各个城市的优属度 $u(03)=(0.417,0.408,0.455,0.463)$。

04 年，各个城市的优属度 $u(04)=(0.398,0.436,0.419,0.427)$。

步骤 5　确定综合优属度。

依据式(20-13)知，4 个城市 B_1、B_2、B_3、B_4 的综合优属度分别为

$$[\bar{\bar{U}}_1]=[0.421,0.424,0.429],\quad [\bar{\bar{U}}_2]=[0.423,0.428,0.431]$$

$$[\bar{\bar{U}}_3]=[0.427,0.429,0.433],\quad [\bar{\bar{U}}_4]=[0.443,0.446,0.449]$$

由动态优化决策模型的排序原则可知，这 4 个城市的排序关系为

$$B_4 \succ B_2 \succ B_3 \succ B_1$$

所以城市 B_4 为最佳投资对象。

2. 利用动态理想决策模型进行优先排序

步骤 1～步骤 3 与上面动态优选决策模型算法完全相同。

步骤 4 确定 t 时段的贴近度。

02 年，各个城市的优属度 $\delta(02)=(0.151,0.166,0.127,0.139)$。

03 年，各个城市的优属度 $\delta(03)=(0.121,0.113,0.146,0.154)$。

04 年，各个城市的优属度 $\delta(04)=(0.107,0.141,0.119,0.133)$。

步骤 5 确定综合贴近度。

依据式(20-15)知，4 个城市 B_1、B_2、B_3、B_4 的综合贴近度分别为

$$[\bar{\bar{\delta}}_1]=[0.123,0.126,0.129],\ [\bar{\bar{\delta}}_2]=[0.135,0.139,0.141]$$

$$[\bar{\bar{\delta}}_3]=[0.128,0.131,0.134],\ [\bar{\bar{\delta}}_4]=[0.139,0.142,0.145]$$

由动态理想模型的排序原则可知，这 4 个城市的排序关系为

$$B_4 \succ B_2 \succ B_3 \succ B_1$$

所以城市 B_4 为最佳投资对象。

3. 两种决策模型的计算结果对比分析

由 20.4.1 节和 20.4.2 节的案例分析可知，动态理想决策模型与动态优选决策模型计算结果一致，4 个城市的优先排序也一致，为

$$B_4 \succ B_2 \succ B_3 \succ B_1$$

所以，利用模糊迭代算法，在对原始数据进行信息挖掘的基础上，建立两种基于动态多指标的模糊优选决策模型，不但丰富了模糊优选理论模型，而且为解决动态多指标决策问题提供了新的途径，在实际应用上也有一定的实用价值和理论意义。

参考文献

[1] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

[2] 张全. 复杂多属性决策研究[M]. 沈阳：东北大学出版社，2008.

[3] 孔锋. 模糊多属性决策理论方法及其应用[M]. 北京：中国农业科学技术出版社，2008.

[4] Hwang C L, Yoon K. Multiple Attribute Decision Making[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[5] 李作泳，丁晶，彭茄红. 环境质量评价原理与方法[M]. 北京：化学工业出版社，2004.

[6] 汪培庄. 模糊集合论及其应用[M]. 上海：上海科技出版社，1983.

[7] 秦寿康. 综合评价原理与应用[M]. 北京：电子工业出版社，2003.

[8] 蔡文. 物元模型及其应用[M]. 北京：科学技术文献出版社，1994.

[9] 蔡文. 可拓学概述[J]. 系统工程理论与实践，1998，18(1)：76—84.

[10] 佟春生. 系统工程的理论与方法概论[M]. 北京：国防工业出版社，2005.

[11] Pawlak Z. Rough sets and intelligent data analysis[J]. Information Sciences, 2002, 23(147): 1—12.

[12] Pawlak Z. Rough sets theory and its application to data analysis[J]. Cybernetics and Systems, 1998, 29(3): 661—688.

[13] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[14] 胡寿松. 粗糙决策理论与应用[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2006.

[15] 曹庆奎. 基于粗糙—未确知测度模型的企业技术创新能力评价研究[J]. 系统工程理论与实践，2006，17(4)：67—72.

[16] 刘涛. Rough 集及 Rough 推理[M]. 北京：科学出版社，2001.

[17] 邓聚龙. 灰色系统理论教程[M]. 武汉：华中理工大学出版社，1990.

[18] 邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 北京：科学出版社，1993.

[19] 刘思峰，郭天榜，党耀国. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2000.

[20] Li S F. On measure of grey information[J]. The Journal of Grey System, 1994, 6(4): 279—288.

[21] Xu J P. On a kind of information grey number[J]. The Journal of Grey System, 1994, 6(4): 279—288.

[22] 杨伦标，高英仪. 模糊数学原理及其应用[M]. 广州：华南理工大学出版社，2000.

[23] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338—353.

[24] Zimmermann H J. Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1987.

[25] Kacprzyk J. Group decision making with a fuzzy linguistic majority[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18: 105—118.

[26] Xu Z S. On compatibility of interval fuzzy preference matrice[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3: 217—225.

[27] Xu Z S. Intuitionist Fuzzy Information: Aggregation Theory and Applications[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[28] 程乾生. 属性识别理论模型及其应用[J]. 北京大学(自然科学版)，1997，33(1)：12—20.

[29] 程乾生. 质量评价的属性数学模型和模糊数学模型[J]. 数理统计与管理，1997，23(6)：63—69.

[30] 程乾生. 属性数学—属性测度和属性统计[J]. 数学的实践与认识，1998，28(2)：23—27.

[31] 李群.不确定数学方法研究及其在社会科学中的应用[M].北京：中国社会科学出版社,2005.
[32] 李群.我国可持续发展指标体系属性区间识别综合评价模型及其应用[J].数学的实践与认识,2004,34(8):6—11.
[33] 门定辉.基于变异系数权重的水资评价属性识别模型[J].哈尔滨工业大学学报,2005,37(10):1373—1375.
[34] 汪新凡.城市公共交通发展水平的属性数学识别模型[J].交通运输工程学报,2007,5(1):118—122.
[35] 张兴芳,管恩瑞,孟广武.区间值模糊综合评判及其应用[J].系统工程理论与实践,2001,21(12):81—84.
[36] 李志林.关联函数为区间数的综合评价方法[J].江汉大学学报(自然科学版),2003,31(1):17—20.
[37] 张方伟,姚炳学.区间数综合评判模型的改进与应用[J].系统工程与电子技术,2006,8:1185—1187.
[38] 刘进生,王绪柱,张宝玉.区间数排序[J].工程数学学报,2001,18 (4):103—109.
[39] 郭志林,薛明志.FUZZY区间数的一种排序方法及综合评判模型[J].数学的实践与认识,2005,35(7):224—247.
[40] 张吉军,刘家才.区间数多指标决策问题的决策方法研究[J].预测,2002,21(1):73—75.
[41] 朱绍强,孟科,张恒喜.区间数灰色模糊综合评判及其应用[J].电光与控制,2006,13(3):36—38.
[42] 吴江,黄登仕.区间数排序方法研究综述[J].系统工程,2004,26(8):1—36.
[43] 徐泽水.区间型多属性决策的一种新方法[J].东南大学学报(自然科学版),2003,33(4):498—501.
[44] 攀玉英.权重为区间数的多指标决策问题的逼近理想点法[J].系统工程与电子技术,2002,24(11):76—78.
[45] 徐泽水,达庆利.区间数排序的可能度及其应用[J].系统工程学报,2003,18(1):67—70.
[46] 张吉军.区间数多指标决策问题的灰色关联分析法[J].系统工程与电子技术,2005,27(6):1030—1033.
[47] 胡启洲,张卫华.高速公路交通安全的模糊区间评价[J].中国安全科学学报,2007,17(8):26—31.
[48] Alefeld G,Kreinovich V,Mayer G. On the solution sets of particular classes of linear interval systems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2003,152(1-2):1—15.
[49] Alefeld G,Herzberger J. Introduction to Interval Computations[M]. London: Academic Press,1983.
[50] Chanas S,Kuchta D. Multi-objective programming in optimization of interval objective functions a generalized approach[J]. European Journal of Operational Research,1996,94(3):594—598.
[51] Da Q L,Xu Z S. Singl eobjective optimization model in uncertain multi-attribute decision-making[J]. Journal of Systems Engineering,2002,17(1):50—55.
[52] Hladík M. Solution set characterization of linear interval systems with a specific dependence structure[J]. Reliable Computing,2007,13(4):361—374.
[53] Hsu H M,Chen C T. Aggregation of fuzzy opinions under group decision making[J]. Fuzzy sets and decision,1996,79:279—285.
[54] Kolev L V. Solving linear systems whose elements are nonlinear functions of interval parameters[J]. Numerical Algorithms,2004,37:199—212.
[55] 卜广志,张宇文.基于三参数区间数的灰色模糊综合评判[J].系统工程与电子技术,2001,23(9):43—45.
[56] Ekel P Y. Fuzzy sets and models of decision making[J]. International Journal of Computers and Mathematics with Applications,2002,44(7):863—875.
[57] 钱钢,徐泽水.三种基于理想点的不确定多属性决策优化模型[J].系统工程与电子技术,2003,25(5):

1—3.

[58] Zadeh L A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning[J]. Information Sciences, 1975, 8: 199—249.

[59] Ma J, Fan Z P, Huang L H. A subjective and objective integrated approach to determine attribute weights[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 112: 394—404.

[60] 张吉军,攀玉英. 权重为区间数的多指标决策问题的逼近理想点法[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(11): 76—78.

[61] Xu Z. An approach to improving consistency of fuzzy preference matrix[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2003, 2: 3—12.

[62] 刘家学,黄德成. 无信息多指标决策的层次——关联优化模型[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(12): 7—10.

[63] Olson D L. Comparison of weights in TOPSIS models[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2004, 40: 82—85.

[64] Chen C T. Extensions of the TOPSIS for group decision making under environment[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114: 1—9.

[65] 罗党,刘思峰. 灰色关联决策方法研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(1): 101—106.

[66] Inuiguchi M, Ramik J, Tanino T, et al. Satisfying solutions and duality in interval and fuzzy linear programming[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 135(1): 151—177.

[67] 陈晓红,阳喜. 一种基于三角模糊数的多属性群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(2): 278—282.

[68] Kolev L V. Solving linear systems whose elements are nonlinear functions of interval parameters[J]. Numerical Algorithms, 2004, 37: 199—212.

[69] 刘家学,黄德成. 带有方案偏好信息的多指标决策法[J]. 系统工程与电子技术, 1999, 21(1): 4—7.

[70] Saaty T L, Vargas L G. Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process[J]. European Journal of Operational Research, 1987, 32: 107—117.

[71] 卫贵武. 区间数动态多指标决策的投影法[J]. 统计与决策, 2006, 13(10): 140—141.

[72] Xu Z S, Da Q L. An uncertain ordered weighted geometric averaging (UOWGA) operator and its application[J]. Information: An International Journal, 2004, 7: 75—182.

[73] 植萍. 动态区间数多指标决策的优势方案选择[J]. 统计与决策, 2006, 13(10): 17—18.

[74] Fodor J, Roubens M. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[75] 卫贵武. 时间权重为区间值的时序多指标决策[J]. 统计与决策, 2006, 13(9): 40—41.

[76] 党耀国,刘思峰,刘斌,等. 基于动态多指标灰色关联决策模型的研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 69—72.

[77] 卫贵武. 区间数多指标决策问题的新灰色关联分析法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1358—1359.

[78] 孙晓东,焦玥,胡劲松. 基于灰色关联度和理想解法的决策研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(4): 63—67.

[79] Lee K S, Park K S, Eum Y S, et al. Extended methods for identifying dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise information[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 134: 557—563.

[80] Huynh V N, Nakamori Y, Ryoke M, et al. A fuzzy target based model for decision making under uncertainty[R]. Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vancouver, 2006: 1611—1618.
[81] 曾小明. 公共交通服务质量的模糊评定法[J]. 佛山大学学报, 1997, 15(4): 67—72.
[82] 杨晓华. 城市环境质量综合评价的多目标决策理想区间法[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 28(8): 119—123.
[83] 胡启洲, 陆化普. 基于属性区间的高速公路交通安全评价模型[J]. 中国安全科学学报, 2009, 19(11): 146—151.
[84] 马荣国. 公路建设项目综合评价权重确定方法[J]. 交通运输工程学报, 2005, 5(2): 110—112.
[85] 胡启洲, 张卫华. 一种基于三元区间数的多指标决策法[J]. 统计与决策, 2007, 252(24): 26—28.
[86] 胡启洲, 张卫华, 于莉. 三参数区间数研究及其在决策分析中的应用[J]. 中国工程科学, 2006, 9(3): 47—51.
[87] Xu R N, Zhai X Y. Extensions of the analytic hierarchy process in fuzzy environment[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 52: 251—257.
[88] 汪泽焱, 顾洪英, 益晓新, 等. 一种基于熵的线性组合赋权法[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 12(3): 112—116.
[89] 王美义. 模糊信息的熵权多属性决策方案评估方法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(10): 1523—1526.
[90] 刘家学, 黄德成. 多指标决策的最优线性分派法[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(7): 25—27.
[91] 金菊良. 动态多指标决策问题的投影寻踪模型[J]. 中国管理科学, 2004, 12(1): 64—67.
[92] 饶从君, 肖新平. 风险型动态混合多属性决策的灰矩阵关联度法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1353—1357.
[93] 裴玉龙. 道路交通安全[M]. 北京: 人民交通出版社, 2007.
[94] 陆华普. 城市交通现代化管理[M]. 北京: 人民交通出版社, 1998.
[95] 王应明. 多指标决策与评价的新方法——投影法[J]. 系统工程与电子技术, 1999, 21(3): 1—3.
[96] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.
[97] 王炜. 城市公共交通系统规划方法与管理技术[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
[98] 邓卫, 胡启洲. 基于灰色模糊数的公交线网优化研究[J]. 中国工程科学, 2007, 5(9): 1—3.
[99] 胡启洲, 邓卫. 城市常规公共交通系统的优化模型与评价方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
[100] 张锦华, 门宝辉. 基于信息熵的天然草地综合评价的模糊物元分析法[J]. 山地学报, 2003, 21(12): 64—68.
[101] 党耀国, 刘思峰, 文斌. 基于动态多指标灰色关联决策模型[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 69—72.
[102] 樊治平. 一类动态多指标决策问题的关联分析[J]. 系统工程, 1995, 67(1): 23—27.
[103] 李希灿. 多目标决策二级模糊优选模型[J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(4): 27—33.
[104] Opricovic S, Tzeng G H. Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS[J]. European Journal of Operational Research, 2004, (156): 445—455.
[105] Chu T C. Facility location selection using fuzzy TOPSIS under group decisions[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2002, 10(6): 687—701.